## *Geodesia, Topografía y Cartografía: Objetivos y diferencias.*

La **Geodesia** es la ciencia que trata la determinación de la forma y dimensiones de la Tierra, así como también los métodos de medición y cálculo para la ubicación relativa de los puntos de la superficie terrestre en su totalidad o en extensiones tales que es necesario tener en cuenta la curvatura terrestre. Para ello se consideran como superficies de referencia la esfera, el elipsoide de revolución y el geoide.

La **esfera** se caracteriza por contar con un radio de alrededor de 6370km, despreciando la diferencia existente entre los ejes polar y ecuatorial de la Tierra.

El **elipsoide de revolución** se genera a través de la rotación de una elipse alrededor de su eje menor. En el caso de la Tierra, el eje menor es el que une los polos, y el mayor el correspondiente al Ecuador, con una diferencia entre ambos de alrededor de 21km. Los parámetros que lo definen son ***a*** y ***b***, longitudes de los semiejes ecuatorial y polar respectivamente, cuyas magnitudes varían de acuerdo con distintos estudios; es así como puede hacerse referencia a los elipsoides de Bessel, Hayford u otros. También es parámetro de referencia la curvatura $\alpha = (a - b).\ a^{-1} \cong 1/297$.

El **geoide** es la superficie que adopta el nivel medio del mar en equilibrio, supuestamente prolongado a través de los continentes. Cumple la condición de ser perpendicular a la vertical en cualquier punto de la superficie. [*Vertical* es la recta que contiene al hilo de la plomada]

Las ondulaciones del geoide dificultan las mediciones, por lo cual las cartas se confeccionan haciendo referencia al elipsoide de revolución, y los mapas a la esfera.

La Geodesia coloca marcas convenientes distribuidas sobre la superficie terrestre de manera que formen los vértices de triángulos ligados entre sí, determinando sus posiciones relativas. Además, construye marcas altimétricas, con sus alturas con respecto a la superficie de referencia, que es el nivel medio del mar. Ambos tipos de marcas son los puntos de apoyo de la Topografía.

La **Topografía** es la ciencia que estudia la determinación de las posiciones relativas de los puntos de la superficie terrestre en una extensión limitada, tal que la superficie de referencia utilizada pueda considerarse plana en lugar de espacial, con un error insignificante. Implica también el conocimiento y manejo de los instrumentos que utiliza para dichas determinaciones.

La Topografía está íntimamente ligada a la Geodesia, pues esta ciencia es la que le suministra los puntos de apoyo a sus trabajos. Por lo tanto la Geodesia crea y construye marcas o puntos artificiales distribuidos sobre la superficie terrestre, a los que suministra coordenadas y cotas altimétricas definitivas. La Topografía, apoyada en esas marcas, levanta y acota puntos de la superficie física o real de la Tierra, que una vez representadas en el plano, dará la configuración topográfica de la zona que interesa con sus detalles naturales y artificiales.

Como detalles naturales podemos citar: ríos, arroyos, lagos, lagunas, barrancas, etc., y como detalles artificiales todos los debidos a la mano del hombre: puentes, carreteras, alcantarillas, construcciones de todo tipo, alambrados y otros.

Pueden establecerse así las diferencias entre la Geodesia y la Topografía. La **Geodesia** estudia la <u>superficie de la Tierra en general</u>, proporcionando <u>referencias absolutas</u>, remitidas a <u>superficies de referencia curvas</u>, mientras que la **Topografía** establece las <u>posiciones relativas</u> de <u>objetos</u> naturales y artificiales de la superficie terrestre, precisando <u>referencias relativas</u> sobre <u>superficies planas de referencia</u>.

La **Cartografía** es la ciencia que estudia la representación gráfica, sobre un plano, de la totalidad o de parte de la superficie terrestre. Cuando la extensión a representar se encuentra en el ámbito de la Geodesia, la Cartografía necesita recurrir a métodos llamados ***Proyecciones Cartográficas.*** En el campo de la Topografía sólo debe tener en cuenta la escala y la representación correspondiente se llama ***Plano.***

## Etapas de los trabajos topográficos

**1. Trabajo de campo:** etapa durante la cual se obtienen los datos para la realización de los trabajos.

1.1. *Consulta de antecedentes:* a través de documentación existente del sector a relevar.

1.2. *Reconocimiento del terreno:* permite determinar los inconvenientes que pueden presentarse durante el levantamiento y elegir el método que mejor se adapte a las condiciones.

1.3. *Mediciones sobre el terreno:* se efectúan sobre el terreno mediciones con el instrumental adecuado y los datos se anotan en las libretas de campaña, en las cuales también se dibujan croquis con los detalles que interesan levantar.

**2. Trabajo de gabinete:**

2.1. *Cálculos:* se efectúan cálculos con los datos tomados en el trabajo de campaña. Se aplican, en especial, los conocimientos de geometría y trigonometría.

2.2. *Representación gráfica:* se dibuja el terreno con todos los detalles que interesan, en escala, recurriendo a los símbolos convencionales.

**3. Elaboración del Proyecto:** con los datos del trabajo de campaña y los del trabajo de gabinete, se elabora el proyecto de la obra de ingeniería. En esta etapa interviene el proyectista, quien puede o no ser el mismo que ha realizado los trabajos previos. El proyecto incluye:

3.1. Planos generales.

3.2. Planos de detalles.

**4. Replanteo del Proyecto:** consiste en la determinación y materialización de puntos característicos de la obra, mediante la colocación de señales como estacas, mojones o piquetes en el terreno.

**5. Controles topográficos durante la construcción:** en forma paralela a la construcción se efectúan controles periódicos de los distintos componentes de la obra, a fin de verificar o corregir cotas, distancias y demás.

## Levantamientos Topográficos

Se llama ***levantamiento topográfico*** al conjunto de operaciones que tienen por objeto determinar las posiciones relativas de puntos sobre la superficie terrestre. Estas operaciones consisten en medir las distancias horizontales y verticales entre diversos objetos terrestres, determinar ángulos entre alineaciones, hallar la orientación de estas últimas, etc., entre otras.

Las tareas mencionadas se complementan con el cálculo matemático y el dibujo de planos, perfiles, diagramas, aplicando los elementos que proporcionan la Trigonometría y la Geometría.

Todas las obras públicas o privadas de cierta importancia, requieren un levantamiento previo, sobre cuyos resultados ha de basarse el proyecto; una vez elaborado este último, por medio de otra operación topográfica llamada ***replanteo,*** se señalan en el terreno las obras proyectadas para poder iniciar su construcción.

***Clases de levantamientos***

De acuerdo a la actividad pueden ser:
- Catastrales
- Hidrográficos
- para obras viales

Según las ramas de la Topografía involucradas
- Planimétricos
- Altimétricos
- Planialtimétricos

***Clasificación de las operaciones topográficas:***

Las ramas de la Topografía son:

- **Planimetría**: es la parte de la Topografía que estudia la determinación de las posiciones relativas de las proyecciones horizontales de los puntos del terreno, es decir, las proyecciones de los puntos del terreno sobre un plano de referencia horizontal. Se miden ángulos horizontales y distancias; se utilizan cintas, teodolitos y brújulas.

- **Altimetría**: es la parte de la Topografía que estudia la determinación de las alturas de los puntos del terreno con respecto a un plano de referencia. Cuando esa superficie de referencia coincide con el nivel medio del mar (geoide), esas alturas se denominan ***altitudes*** de los puntos y ***cotas,*** si el plano de referencia no coincide con el nivel medio del mar. En Topografía para obras de Ingeniería se trabaja, en general, con cotas. Los instrumentos que se utilizan son los niveles de anteojos, complementados con miras.

- **Planialtimetría:** es la rama de la Topografía que estudia la determinación simultánea de planimetría y altimetría del terreno, para lo cual se emplean los taquímetros.

Supongamos los tres puntos A, B, C (Fig. 1). En planimetría se suponen proyectados sobre el plano de referencia H, obteniendo A', B' y C', y se toman todas las medidas necesarias para la ubicación relativa de dichas proyecciones (distancias, ángulos, etc.).

En altimetría se miden las cotas o altitudes de A, B y C con lo cual quedarán completas las posiciones relativas de dichos puntos.

La planialtimetría permite la determinación simultánea de los parámetros de ubicación relativa en referencia a un plano, incluyendo distancias, ángulos horizontales y altitudes o cotas.

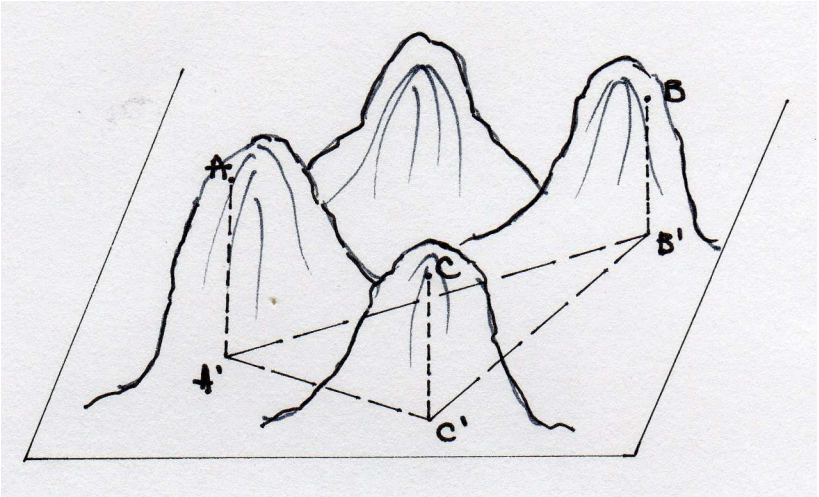



Figura 1. Formas de operaciones topográficas.

### *Limite de los levantamientos topográficos*

La Topografía, para referir sus operaciones, considera una extensión limitada de la superficie terrestre como un plano, como superficie de referencia. Veamos hasta qué punto es despreciable el error que se comete al hacer esta aproximación. La verdadera superficie de referencia es el geoide, que lo podemos, con error despreciable, asimilar a una esfera de radio 6370 kilómetros.

Supongamos (Fig. 2) que se desea medir la distancia AB pero en lugar de tomar esta medida, consideramos la medida aproximada AB' sobre un plano tangente en A y medio entre las verticales en A y en B.

Llamamos: *Error absoluto = observado menos verdadero.*

O sea: $\varepsilon = O - V = \overline{AB} - \widehat{AB}$ (1)

En AôB': $\overline{AB}' = R \times tg\alpha$ (2).

Por trigonometría: $\widehat{AB} = R.\ \alpha$ (3) siendo $\alpha$ en radianes.

Reemplazando (2) y (3) en (1): $\varepsilon = R.\ tg\ \alpha - R.\ \alpha = R\ (tg\ \alpha - \alpha)$ (4)

El desarrollo en series de la tangente es:

$tg\ \alpha = \alpha + (1/3)\ \alpha^3 + (2/15)\ \alpha^5 + .....$

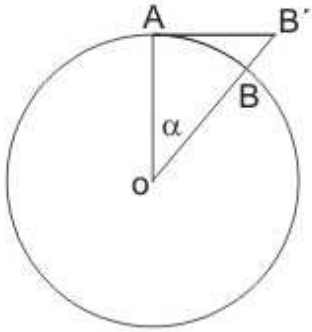



Figura 2

Por ser muy pequeños se desprecian los términos a partir del **3º,** inclusive:

$tg\ \alpha = \alpha + (1/3)\ \alpha^3$ (5)

Reemplazando (5) en (4):

$\varepsilon = R.(\alpha + 1/3\ \alpha^3 - \alpha) = (1/3).R.\alpha^3$ (4)

Siendo $\alpha = \widehat{AB} / R$

$\varepsilon = (1/3).\ R.\ (\widehat{AB} / R)^3 \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{3} \cdot \frac{\widehat{AB}^3}{R^2}$

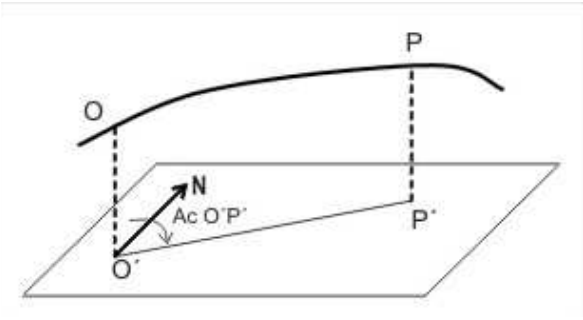
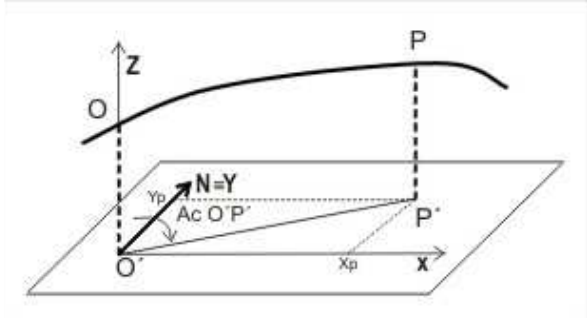
Se llama error relativo a: $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{V} \cong \frac{\varepsilon}{O} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_r = \frac{\frac{\widehat{AB}^3}{3.R^2}}{AB} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_r = \frac{\widehat{AB}^2}{3.R^2}$

Adoptando un error relativo $\boldsymbol{\varepsilon}_r$ = 1:10000, y siendo el radio terrestre *R* = 6370km:

$$\frac{1}{10000} = \frac{\widehat{AB}^2}{3.(6370km)^2} \quad \therefore \quad \widehat{AB} = \sqrt{\frac{3.(6370km)^2}{100^2}} = 63{,}70km.\sqrt{3} \cong 110km$$

Este resultado nos indica que mientras la distancia medida *AB* sea menor de 110km el error relativo que se comete, es menor de 1/10000, que es mucha precisión para Topografía (generalmente el error relativo oscila entre 1/1000 y 1/5000).

***Sistemas de coordenadas topográficas***

| **Sistema polar.** La posición de un punto respecto de otro se determina mediante un ángulo y una distancia. | **Sistema cartesiano.** La ubicación de un punto se precisa por coordenadas. |
|---|---|
| Coordenadas:<br>• Ángulo Ac O'P'<br>• Distancia O'P' | Coordenadas: $x_p$, $y_p$<br>Equivalencias con coordenadas polares:<br>$X_p$ = O'P' sen AcO'P'<br>$Y_p$ = O'P' cos AcO'P' |
|  |  |

## Representaciones planas de la superficie terrestre

**Plano**. Es la representación gráfica del terreno dentro de los límites de la Topografía y que, por lo tanto, no exige hacer uso de las ***proyecciones cartográficas.*** Su escala, en general, es mayor de 1/25000. Puede mostrar sólo la Planimetría, o también la Altimetría. Los planos topográficos dan a conocer el terreno que representan, con todos sus detalles, naturales y artificiales, y, con signos convencionales, aquellos detalles que por su tamaño no podrían ser representados en escala.

De acuerdo a lo que se busque representar o al tipo de levantamiento que se ha efectuado en el terreno, los planos pueden ser:

Planos
- Planimétricos
- Altimétricos
- Planialtimétricos

**Carta Topográfica**. Es la representación gráfica del terreno en una extensión tal que excede los límites de la Topografía y que debido a la importancia del error entre tomar el plano y la superficie curva, es necesario hacer uso de sistemas especiales de representación, llamados ***proyecciones cartográficas.***

La escala de las cartas topográficas varía de 1/25000 a 1/500000. Muestran la planimetría y altimetría del terreno, esta última mediante sistemas convencionales (curvas de nivel, trazos de pendiente, sombreado plástico y capas hipsobatimétricas).

**Cartas geográficas y mapas**. Muestran una gran extensión o la totalidad de la superficie terrestre (planisferios). Su escala es menor de 1/500000. También requiere el uso de proyecciones cartográficas.

En Ingeniería, se hace uso muy intenso de planos y en algunas especialidades, como Recursos Hídricos, también de cartas topográficas. Tanto mapas como cartas son confeccionados gracias a transformaciones que permiten representar en forma plana una superficie curva como la de la Tierra.

## Escalas

Todo plano, carta o mapa, debe ser de dimensiones menores a la de la superficie del terreno que representan, por lo cual habrán de dibujarse de modo que la figura sea semejante. Así, cualquier magnitud medida en el plano y la homóloga del terreno, tendrán una *relación de semejanza*, denominada *escala.*

Si llamamos:

E = escala

d = distancia en el dibujo (plano, carta, etc.)

D = distancia en el terreno

$$E = \frac{d}{D} = \frac{1}{D/d} = \frac{1}{M}$$

Donde M es el ***módulo*** o denominador de la escala; es adimensional.

Tres son los problemas más frecuentes que se presentan en el uso de escalas.

**a)** Dada la escala y la distancia en el terreno, hallar la distancia homóloga en el dibujo. Este es el problema más frecuente que se le presenta al dibujante de un plano o carta, de acuerdo a los datos tomados en el terreno.

<u>Datos:</u> 1/M; D <u>Incógnita:</u> d

De la igualdad: $\frac{d}{D} = \frac{1}{M} \therefore d = \frac{D}{M}$

Por lo tanto, para pasar del terreno al dibujo, se divide por el denominador de la escala.

Ejemplo → Datos: 1/M=1/2000; D=250 metros.

d = D / M= 250m / 2000 = 25000cm / 2000 = 12,5cm

**b)** Dada la escala y la distancia en el dibujo, hallar la distancia homóloga en el terreno. Este es el problema que más frecuentemente se le presenta al usuario del plano o carta.

Datos: 1/M; d. Incógnita: D

De la igualdad: $\frac{d}{D} = \frac{1}{M} \therefore D = d \cdot M$

Entonces, para pasar del dibujo al terreno se debe multiplicar por el denominador de la escala.

Ejemplo → Datos: 1/M=1/2500; d= 10cm Incógnita: D

D = 10cm. 2500 = 25000cm = 250m

**c)** Dadas las distancias en el terreno y su homóloga en el plano, hallar la escala. Este problema se presenta cuando se quiere determinar la escala omitida en el plano o bien cuando se conocen las dimensiones en el terreno y las dimensiones de la hoja de papel de dibujo.

Datos: D; d Incógnita: E = 1 / M

De la igualdad: $\frac{d}{D} = \frac{1}{M} \therefore M = \frac{D}{d} \Rightarrow E = \frac{1}{M}$

Es decir que para hallar la escala primero se halla el denominador de la misma dividiendo la distancia en el terreno por la homóloga en el dibujo y luego se toma su inversa.

Ejemplo → Datos: D = 2000m y d = 4 cm

M = 2000m / 4cm = 2000m / 0,04m = 50000 $\Rightarrow$ E = 1/50000

***Tipos de escalas***

Las escalas pueden ser numéricas o gráficas. Las escalas gráficas a su vez son divididas en ordinarias y transversales.

***Escala gráfica ordinaria.*** Es un segmento de recta dividido en partes iguales, cada una indicando la magnitud equivalente en el terreno (Fig. 3). A la izquierda del cero se representa un segmento igual a una parte (talón de la escala), dividido generalmente en diez partes iguales (decimal).

Figura 3. Escala gráfica ordinaria.

Para construir una escala gráfica se procede de la siguiente manera:

Supongamos que se desea construir una escala gráfica correspondiente a la escala numérica *1/4000.*

La longitud representativa de 100 m será: $d = \frac{100m}{4000} = \frac{10000cm}{4000} = 2{,}5cm$

Entonces se dibuja una semirrecta a partir de cero y se miden 2,5cm anotándose 100m y se repite hacia la derecha esa misma distancia de 2,5cm acotándose 200m, 300m, 400m, etc. Desde el cero hacia la izquierda también se acota 100m y se divide en diez partes, cada una de las cuales señala, por consiguiente, 10m. Esto se denomina ***talón*** de la escala.

Con la escala gráfica ordinaria se pueden resolver los problemas siguientes:

a) Hallar la magnitud en el dibujo homóloga a una del terreno, que se conoce.

b) Hallar la magnitud en el terreno de una homóloga del dibujo, conocida.

En el caso de la Fig. 3 se tiene la precisión de 10m y, por estimación, a ojo, se aprecia la fracción de 10m.

***Escala gráfica de transversales.*** Está compuesta por 11 escalas gráficas ordinarias equiespaciadas que se unen con rectas las divisiones de los talones de las dos extremas del modo indicado en la Fig. 4. Con ella, se puede medir con exactitud hasta los metros y se puede estimar a ojo, las fracciones de 1m, para el ejemplo de la Fig.4.

Con esta escala se resuelven los mismos problemas que con la ordinaria, pero con mayor precisión, pues se puede medir con exactitud hasta la centésima parte de cada división de la escala.

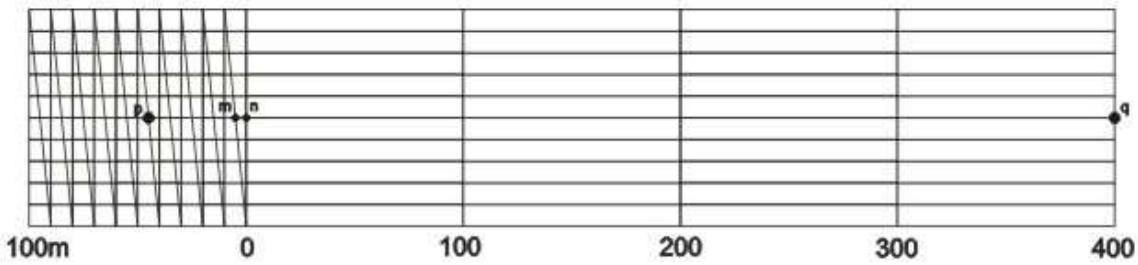



Figura 4. Escala gráfica transversal

Supongamos que en el plano, carta o mapa se desea saber la distancia en el terreno correspondiente a la homóloga pq del dibujo:

$$\overline{pq} = \overline{pm} + \overline{mn} + \overline{nq} = 40m + \overline{mn} + 400m$$

Para calcular mn, por semejanza de triángulos:

$$\overset{\Delta}{mn0} \approx \overset{\Delta}{rs0} \Rightarrow \frac{\overline{mn}}{\overline{n0}} = \frac{\overline{rs}}{\overline{s0}} \therefore \overline{mn} = \frac{rs \cdot n0}{s0} = \frac{10m \cdot 6}{10} = 6m$$

Finalmente: $\overline{pq} = \overline{pm} + \overline{mn} + \overline{nq} = 40m + 6m + 400m$

En forma análoga se resuelve el problema inverso, es decir, hallar la longitud en el dibujo conociendo la escala gráfica y la longitud en el terreno.

<u>Nota</u>: La escala gráfica tiene la ventaja sobre la numérica que, cuando el plano, carta o mapa en que está dibujada, se amplía o reduce, sigue teniendo validez, mientras que la numérica cambia.

## Límite de percepción visual

Se llama límite de percepción visual (o error gráfico, o poder separativo de la vista) a la mínima

distancia a la que se ven separados dos puntos o dos rectas paralelas. Una larga serie de experiencias determinaron que ese valor es de 0,2mm (algunos autores toman 0,1mm y otros 0,3mm).

Por lo tanto, en un levantamiento que se dibujará en escala 1/M, todos los detalles del terreno iguales o menores al producto 0,2mm x M, no tendrán representación en el plano.

Por ejemplo, si el plano se dibuja en escala 1/2000, todos los objetos iguales o menores que 0,2mm x 2000 = 400mm = 0,40m no podrán ser representados en escala en el plano. Además se debe notar que si en la medición de una distancia en el terreno se comete un error absoluto igual o menor que 0,2mm x M (en nuestro ejemplo 0,40m), este error no será notado en el dibujo (siempre que esta distancia no sea acotada).

El producto de 0,2mm por el denominador de la escala nos da, en todos los casos, la distancia en el terreno que no tendrá representación en el plano, llamada dimensión cero.

Supongamos, por ejemplo, que se efectuará el levantamiento en el terreno (Fig. 5) de una construcción, ubicándola con respecto a la alineación AB.

En el trabajo de campaña se medirán las abscisas y ordenadas de los puntos 1, 2, 3, 4 y 5, referidas a la alineación AB, y además las medidas del perímetro. Supongamos también que el plano del levantamiento se dibujará en escala 1/1000. El error gráfico en el plano será de 0,2mm x 1000 = = 200mm = 0,20m. Si el dibujo del detalle no consigna las medidas, no tiene sentido práctico medir en el terreno con una exactitud mayor de 0,20m, pues no se percibiría esta magnitud en el dibujo, para este ejemplo.

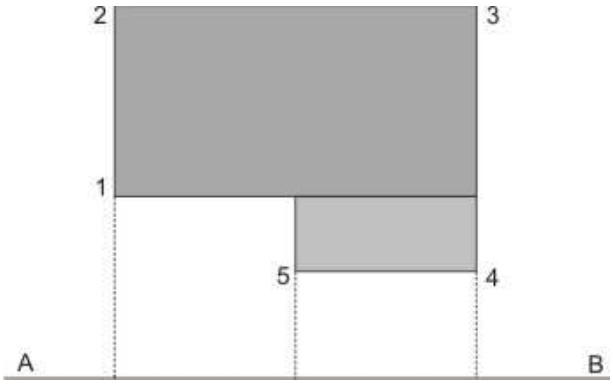



Figura 5.

***Escalas más frecuentes en Topografía.***

En los planos topográficos rara vez se utilizan escalas menores de 1/10000, siendo frecuentes para obras de ingeniería las de 1/1000; 1/2000; 1/2500; 1/5000 y para los planos de detalle 1/50; 1/100; 1/200 y 1/500.

En cada caso deberá elegirse la escala pensando en los detalles más pequeños que se desea que aparezcan, de acuerdo con el fin que se persiga, de modo que en el dibujo se aprecien con suficiente tamaño para que pueda estimarse su magnitud. Para ello debe tenerse en cuenta el límite de percepción visual, ya definido anteriormente.

***Signos convencionales.***

Supongamos querer representar en un plano o carta topográfica una casa aislada de 10 metros de lado. Si utilizamos una escala de 1/1000 se deberá dibujar un cuadrado de 1cm de lado y si la

escala es de 1/10000, de 1 mm de lado. Pero si se utiliza una escala de 1/50000, la casa estaría representada por un cuadrado de 0,2 mm de lado, y aparecería según un punto, sin dimensión apreciable, por estar debajo del poder separativo de la vista. Entonces, si se decide que ese detalle (la casa), por ser importante, debe aparecer en el plano, habrá que hacerlo con un símbolo o signo convencional, que exagerará las dimensiones del detalle.

Podemos entonces definir los símbolos convencionales topográficos, diciendo que son los gráficos que se convienen representan detalles naturales y artificiales del terreno que, por su pequeñez, no podrían ser representados en sus verdaderas dimensiones si se observara fielmente la escala.

Los detalles que se representan con símbolos convencionales representan también la altimetría y planimetría del terreno.

A continuación, se hace un resumen de los detalles más usuales:

- **Hidrografía**
  - Naturales
    - Mares, ríos, arroyos, lagunas, esteros, bañados, cañadas, etc.
  - Artificiales
    - Canales, acequias, zanjas, represas.
- **Comunicaciones**
  - **Vías**
    - Naturales
      - Marítimas
      - Fluviales
      - Lacustres
    - Artificiales
      - Caminos
        - pavimentados
        - consolidados
        - naturales
        - exclusivos para autos
        - sendas
        - otros
      - Ferrocarriles
        - Distintas trochas, cantidad de vías, de cremallera, decouville, etc.
  - **Medios**
    - Telégrafo
    - Teléfono
    - Radiotelefonía
    - Radiotelegrafía
    - otros
- **Construcciones**
  - Ciudades
  - Poblaciones
  - Obras de arte
  - Edificaciones aisladas
  - Puertos
  - otros
- **Accidentes del terreno**
  - Artificiales
    - Desmontes
    - Terraplenes
    - Zanjas
    - Etc.
  - Naturales
    - Barrancas
    - Elevaciones
- **Clases de terrenos**
  - Naturales
  - Artificiales (o cultivados)

## Levantamientos Planimétricos

### *Señalización y marcación de puntos*

En geometría se considera al punto como un ente abstracto sin dimensiones; en cambio, en topografía es considerado como algo real material, o sea, un objeto físico que se materializa en alguna forma en el terreno. Se marca por medio de mojones, estacas, jalones u otro tipo de señales, según la duración que le deseemos dar a esa marcación.

Levantar un punto significa ejecutar las operaciones necesarias (mediciones, cálculos) para su representación y ubicación en el plano.

La representación de un punto puede ya existir antes de que nos traslademos al terreno para medirlo, por ejemplo, un pararrayos, una chimenea, la arista de una casa, el eje de un tanque o un molino, llamándose por eso, puntos topográficos naturales.

Generalmente los puntos topográficos son marcados a propósito para los fines del levantamiento, por ejemplo, por estacas, piedras marcadas, mojones o jalones. Se llaman puntos topográficos artificiales.

Los distintos tipos de señales tienen que ver en muchos casos con la duración que quiera darse a la marcación.

| | | |
|---|---|---|
| Señales | Permanentes | De duración indefinida, en general de hormigón con placas metálicas. (mojones) |
| | Semipermanentes | Destinadas a durar meses o algunos años; suelen enterrarse para evitar la remoción. (estacas) |
| | Temporarias | Permanecen unas horas, o a lo sumo días, y luego son retiradas. (jalones) |

### *Punto topográfico*

Un punto topográfico es la intersección de una señal material (jalón, mojón, estaca) con la superficie del terreno (punto material).

Entiéndase por punto topográfico, en las mediciones horizontales, siempre su proyección sobre el plano horizontal, haciéndose abstracción de la distancia vertical que pueda separarlo del mencionado plano; lomas, valles u otros accidentes no existen para la representación planimétrica de un punto topográfico.

### *Superficie topográfica*

Es la superficie física de un terreno proyectada sobre un plano horizontal. La determinación de la posición relativa de los puntos de la superficie topográfica es el principal objeto de los trabajos de levantamientos planimétricos. El punto topográfico puede ser natural (arista de una casa, un molino, un pararrayos, etc.) o marcado a propósito para los fines del levantamiento (estaca, poste, mojón, cruz hachada en el centro de una piedra); para hacerlo visible a distancia, se lo sustituye por su vertical, por ejemplo, el eje de un jalón, caño, arista de casa o semejante.

### *Balizamiento de puntos topográficos*

El balizamiento de un punto topográfico es el conjunto de medidas que permiten ubicar dicho punto topográfico rápidamente, o reconstruirlo en forma inmediata en el caso de que haya sido destruido. También se lo denomina monografía del punto topográfico.

En estos casos se toman referencias de puntos lo más fijos posible, como construcciones, o bien, en el caso de puntos importantes, a partir de las poblaciones más cercanas.

### *Alineaciones topográficas*

Se llama línea topográfica (o alineación), a la línea que pasa por dos puntos topográficos determinando un plano vertical. Esta línea puede ser recta, curva o quebrada. Es recta cuando en toda su extensión se mantiene en el mismo plano vertical; es curva cuando en el terreno existe un desnivel o pendiente y es quebrada cuando en el terreno hay obstáculos.

Una alineación se determina por la sucesión de dos o más puntos, todos en el mismo plano vertical.

### *Mediciones lineales directas*

Las mediciones lineales directas son aquellas que se realizan los operadores recorriendo la distancia a medir provistos de elementos tales como cintas o ruedas. Se llaman indirectas cuando se hacen con instrumentos que emiten rayos (láser, infrarrojos o luminosos) ubicados en un extremo y colocando en el otro una pantalla u otro elemento similar (receptor), o bien con taquímetros.

### *Medidas aproximadas y exactas de las distancias*

Al hablar en topografía de distancia entre dos puntos se sobreentiende que se trata de la distancia horizontal, prescindiendo del desnivel que haya entre ellos.

Los métodos para medir distancias se clasifican en aproximados y exactos, de acuerdo a la magnitud del error que se comete al aplicarlos.

- Métodos
  - Aproximados
    - Pasos
    - Ruedas de vehículos
    - Cuentakilómetros de vehículos
    - Telémetro
    - Velocidad del sonido
  - Exactos
    - Indirectos
      - Ópticos (taquimetría, barra subtensa)
      - Electrónicos
    - Directos
      - Cintas y accesorios

Se incluyen dentro de los métodos aproximados aquellos que acarrean errores relativos mayores que 1:200, en tanto que si este error es menor que dicha magnitud se los considera exactos. Normalmente, los métodos exactos implican errores relativos de 1:1000 a 1:5000.

### *Métodos aproximados*

Estos métodos se utilizan para hacer un croquis preliminar del terreno.

*Medición a pasos*

Se emplea el paso del hombre y algunas veces del caballo para determinar distancias aproximadas. En ambos casos es necesario estimar la longitud del paso, es decir, determinar la relación que existe entre la longitud del paso y el metro.

El del hombre se obtiene recorriendo varias veces una distancia de 100 metros de longitud, contando cada vez la cantidad de pasos que contiene. La media de los distintos resultados obtenidos representa el número de pasos equivalentes a la distancia dada. Con un poco de práctica se llega fácilmente a una precisión del 1% en la medición de distancias, en terreno llano. Análogamente se procede con el paso del caballo.

Para evitar lo fatigoso que resulta contar los pasos, se emplea a menudo un instrumento llamado podómetro, de forma y tamaño de un reloj de bolsillo, empleado también para contar los pasos del caballo. Funcionan por la sacudida que se experimenta a cada paso; estas sacudidas mediante un simple mecanismo, se transmiten a una aguja de reloj que va marcando en la esfera del podómetro el número de pasos dados. La aguja central, más larga, registra los pasos sueltos, o sea, uno a uno, otra aguja más pequeña las centenas y una tercera los millares de pasos.

*Medición con ruedas*

Se llama rueda de agrimensor a una rueda provista de un contador de revoluciones, que al rodar por una alineación da la longitud de la misma. El eje de la rueda pone en movimiento al contador, leyéndose el número de vueltas en la esfera de este último. Las más modernas muestran directamente la distancia total en un display.

*Cuentakilómetros de un automóvil*

### *Métodos exactos*

Se realizan las operaciones con cinta métrica. Se trata de cintas de acero de un ancho de 10 a 25mm y de 0,4 a 0,5mm de espesor. Las hay de 20, 25, 30, 50 y 100 m de longitud, siendo las más empleadas para mensuras y mediciones las de 25, 30 y 50 m. En las cintas de 50 y 100 m los dobles metros están marcados por chapitas de bronce de forma elíptica, numeradas por ambos lados, los metros impares por chapitas circulares un poco más pequeñas, sin numerar. Tienen en cada extremo una manija o estribo (Fig. 6) formando parte del primero y último doble decímetro, medidas entre extremos.

Se completa el equipo de medición con un juego de fichas, pequeñas varillas delgadas de 6mm de diámetro y de 35 a 40cm de largo, que terminan en un extremo agudo y en otro en forma de anillo. El juego se compone de 11 fichas que se insertan en un arco de alambre (Fig. 7).

Para facilitar su transporte se arrollan las cintas alrededor de un eje metálico por medio de una manivela y va encerrada en una caja metálica. Las cintas de 10, 20, 25 y 30 metros, se denominan ruletas y van encerradas en una caja de cuero o plástico que las recubre totalmente. Estas cintas tienen grabadas divisiones centímetro a centímetro.

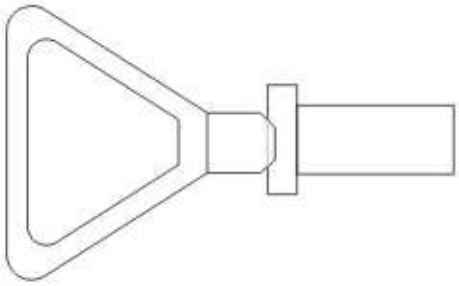


Figura 6.

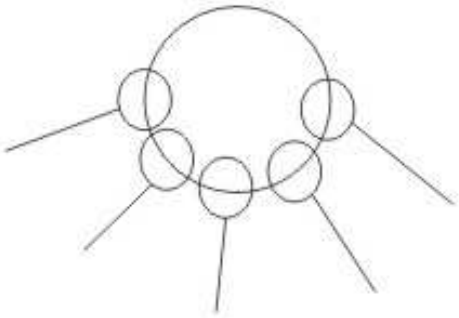


Figura 7.

*Medición de una distancia con cinta*

Para medir una longitud con cinta son necesarios dos operadores: el delantero y el zaguero, siendo este último quien dirige la operación.

Supongamos querer medir la distancia AB con una cinta de 50m. El punto de partida (A) estará marcado por medio de una estaca, jalón, mojón u otra señal cualquiera, el zaguero clava una ficha y le entrega al delantero las diez fichas restantes, apoyando la manija de la cinta según la Fig. 8, el delantero estira la cinta en el sentido de la alineación AB y clava la ficha en el punto O según la Fig. 9. Se ha medido así una “cintada”. Se repite la operación. En la segunda “cintada” el zaguero ha retirado previamente la ficha de A y apoya la cinta en C según Fig. 8 y el delantero apoya la manija según la Fig. 9, y así sucesivamente hasta que el delantero agota sus fichas. Habrá llegado así al punto D. Se han medido 10 cintadas (en nuestro caso 500 metros). El zaguero tendrá ahora en su poder 10 fichas y el delantero habrá clavado la última, quedándose con el aro vacío. Entonces, se dice que se midió una “tirada" (10 cintadas) y el zaguero debe anotarlo de esta forma en su libreta.

A continuación, intercambian los aros quedando nuevamente el delantero con 10 fichas. Se repite así el procedimiento cuantas veces resulte necesario. Supongamos que en el punto E se hayan medido n tiradas y m cintadas, anotadas en la libreta del zaguero. La distancia d, menor que una cintada, se mide con la cinta de agrimensor, con precisión a la menor división (en general, 0,20m) y la sección restante con una cinta ruleta que esté graduada al centímetro(x). Ver fig. 10.

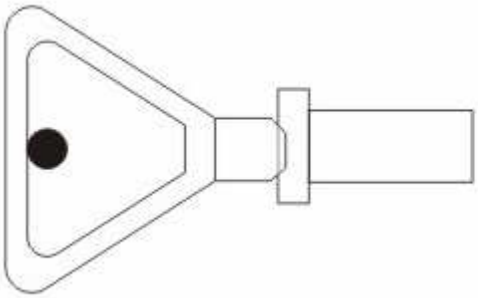


Figura 8.

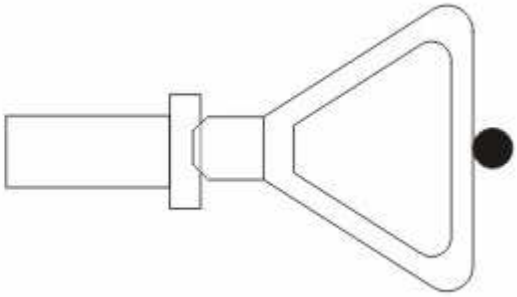


Figura 9.

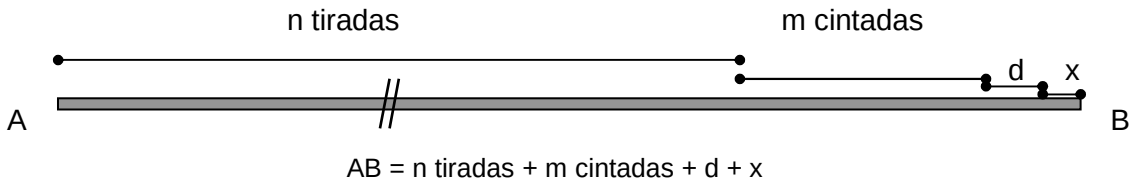



Figura 10.

*Mediciones en terrenos inclinados*

*Reducción de distancias al horizonte*

Los levantamientos planimétricos tienen como objeto la determinación de las proyecciones horizontales del terreno, por lo tanto, interesa conocer las distancias comprendidas entre las verticales trazadas por los diferentes puntos del levantamiento, llamadas distancias reducidas al horizonte.

Si tenemos dos puntos, $P_A$ y $P_B$, siendo la distancia comprendida entre ellos según la pendiente del terreno de longitud L, y designamos $L_0$ a la proyección horizontal de $P_A$ $P_B$, y $\alpha$ a la inclinación del terreno, tendremos:

$$L_0 = L.\ \cos \alpha$$

donde L se mide con cinta y $\alpha$ con un instrumento para la medición de ángulos (goniómetro).

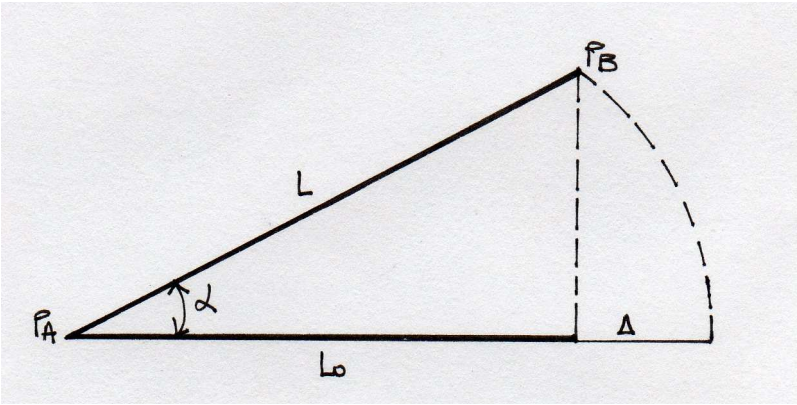



Figura 11.

El ángulo $\alpha$ puede ser tanto en elevación como en depresión, sin que por ello varíe la expresión para la reducción de la distancia al horizonte.

El problema puede resolverse también calculando la diferencia $\Delta$ entre L y L0; a partir de la Fig.11 se calcula:

$\Delta = L - L0 = L - L.\ \cos \alpha = L.\ (1 - \cos \alpha)$ (Fórmula exacta)

$\Delta = 2L.\ \text{sen}^2(\alpha/2)$ (Fórmula exacta)

Pues:

$$1 = sen^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - sen^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow 1 - \cos\alpha = 2.sen^2\frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \Delta = 2.Lsen^2\frac{\alpha}{2}$$

Si se mide la distancia inclinada L entre dos puntos y se conoce su diferencia de nivel h (Fig.12), la distancia reducida al horizonte puede calcularse como sigue, de acuerdo a Pitágoras:

$$L_0 = \sqrt{L^2 - h^2}$$

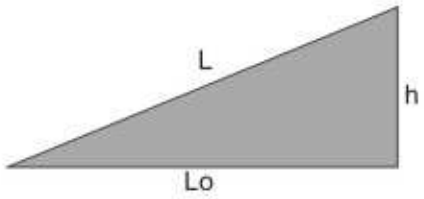



Figura 12.

Dado que en algunos casos no resulta cómoda la resolución de la raíz cuadrada, se recurre a una fórmula aproximada que permite calcular la diferencia entre la distancia inclinada y la horizontal, partiendo también de Pitágoras:

$$L^2 - L_0^2 = h^2$$

$(L + L_0).(L - L_0) = h^2$

Como: $L \cong L_0$, entonces:

$L + L_0 \cong 2L \Rightarrow 2L.(L - L_0) = h^2$

Y es: $\Delta = L - L_0 \cong h^2/2L$

Por lo tanto: $L_0 = L - h^2/2L$

Otra opción es el desarrollo del binomio de Newton:

$$L_0 = \sqrt{L^2 - h^2} = (L^2 - h^2)^{1/2} = (L^2)^{1/2} - \frac{1}{2}.(L^2)^{-1/2}.h^2 + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\left(-\frac{1}{2}\right).(L^2)^{-3/2}.h^3.....$$

$$L_0 = L - \frac{h^2}{2.L} - \frac{h^3}{8.L^{3/2}} - ....$$

En todos los casos de aplicación de fórmulas aproximadas, cuanto menor sea h en relación con las otras dos distancias, mayor será la aproximación obtenida al valor real.

Si el terreno presenta varias pendientes, como puede verse en la figura 13, se procede por tramos.

En este caso:

$d_1 = L_1 . \cos \alpha_1$

$d_2 = L_2 . \cos \alpha_2$

$d_3 = L_3 . \cos \alpha_3$

$d_4 = L_4 . \cos \alpha_4$

Finalmente → $L_o = \Sigma$ di

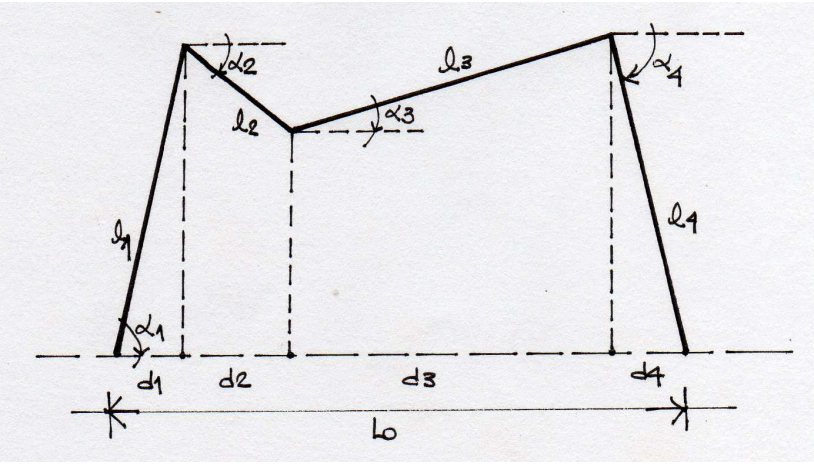



Figura 13.

*Medición en pendiente por resaltos con reglón*

Cuando el perfil del terreno en la dirección que se desea medir se presenta abrupto, no es posible medir la distancia inclinada. (Fig. 14)

Es conveniente en este caso aplicar el método de resaltos, con cinta o con regla rígida y plomada. La medición se realiza por tramos: se mide horizontalmente con cinta hasta una altura en que el operador no pueda ya trabajar; se toma la distancia hasta ese punto límite y se proyecta éste verticalmente hasta la altura del suelo, recurriendo a la plomada para asegurar la verticalidad de la proyección; se repite el procedimiento las veces que sea necesario, hasta que finalmente se mide el resto r del tramo final.

La longitud horizontal $L_0$ se obtiene al sumar las distancias parciales l y el resto r.

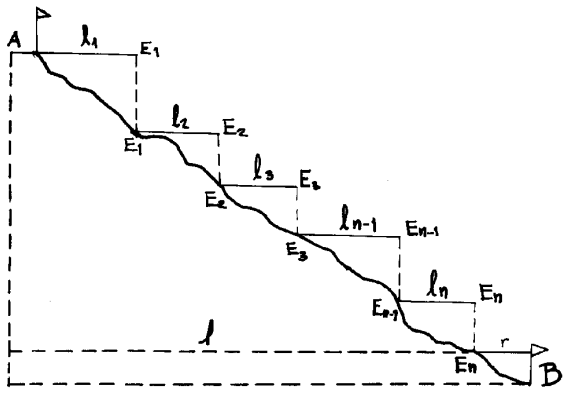



Figura 14.

Se calcula → L = Σ li + r

## Errores en la medición de distancias con cinta

### *Cinta de longitud errónea*

Una cinta de longitud errónea da lugar a un error sistemático que puede eliminarse prácticamente contrastando la cinta y aplicando la corrección así determinada. La cinta puede compararse con otra ya contrastada, o con cualquier otro patrón de longitud que se encuentre disponible.

### *Alineación imperfecta*

El ayudante que marcha adelante en las mediciones con cinta tiende a colocar la aguja lo mismo a un lado que a otro de la verdadera alineación, lo que produce un error sistemático variable, ya que el ángulo horizontal que forma la cinta con la alineación no es el mismo en una cintada que en la siguiente. Este error no puede eliminarse, pero sí reducirse a un valor despreciable poniendo más cuidado en la alineación. (Fig. 15).

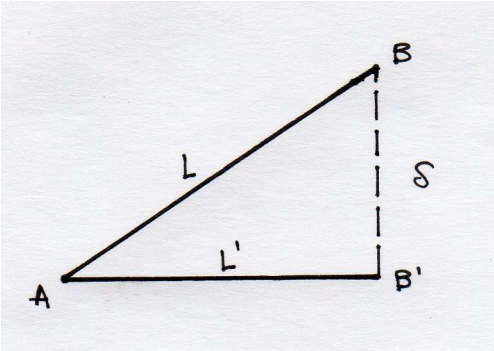


Figura 15. (planta)

Este error se puede calcular con la siguiente fórmula:

ε = O - V = L - L'

En AB'B: $L^2 = (L')^2 + \delta^2 \Rightarrow \delta^2 = L^2 - (L')^2 = (L + L').(L - L') = 2.\ L'.\ \varepsilon$

Dado que $L \cong L' \Rightarrow L + L' \cong 2.L'$:

Error absoluto: $\varepsilon = \dfrac{\delta^2}{2L}$ y Error relativo: $\varepsilon_r = \dfrac{\delta^2}{2L^2}$

Para una cinta de 30 m, el error absoluto es de 1,5 mm cuando uno de los extremos está 30 cm fuera de alineación y el error relativo es de 1: 20000.

Para una cinta de 50 m, cuando un extremo está fuera de alineación: ε = 1 cm y $\varepsilon_r$ = 1/5000.

Para L = 6 m y δ = 0,30 m: $\varepsilon_r = \dfrac{(0{,}30m)^2}{2.(6m)^2} = \dfrac{0{,}09m^2}{72m^2} = \dfrac{1}{72/0{,}09} = \dfrac{1}{800}$

### *Cinta no horizontal o inclinación mal determinada de cinta.*

El efecto es análogo a una alineación defectuosa. Es muy difícil estimar a ojo las pendientes o saber con certeza si la cinta está horizontal. Muchas veces se mantiene exactamente la alineación, considerándose el terreno horizontal cuando en realidad puede tener una pendiente del 10%, que pasa inadvertida para el operador.

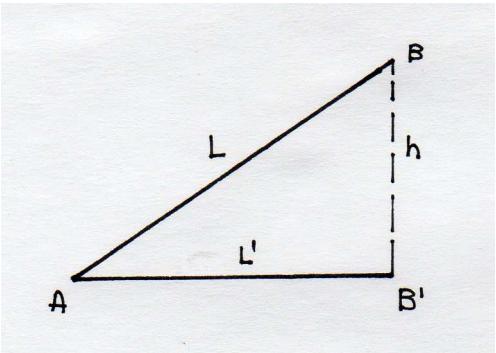


Figura 16. (corte)

Se deducen las fórmulas análogas al caso de defectuosa alineación, donde h es el desnivel entre los puntos A y B (Fig. 16).

Son: $h^2 = L^2 - (L')^2$ $\varepsilon = O - V = L - L'$ $L \cong L' \Rightarrow L + L' \cong 2.L'$

$h^2 = (L + L').(L - L') = 2.\ L'.\ \varepsilon$

Error absoluto: $\varepsilon = \dfrac{h^2}{2.L'}$

Siendo p la pendiente: $p = \dfrac{h}{L'}$ y $\varepsilon_r = \dfrac{\varepsilon}{V} = \dfrac{h^2}{2.L'}.\dfrac{1}{L'} = \dfrac{h^2}{2.(L')^2}$

Error relativo: $\varepsilon_r = \dfrac{1}{2}.p^2$

Para una pendiente p = 2%, el error relativo alcanza el valor: $\varepsilon_r = \dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{2}{100}\right)^2 = \dfrac{1}{5000}$

En el caso de p = 6%: $\varepsilon_r = \dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{6}{100}\right)^2 = \dfrac{1}{525}$

***Cinta floja o torcida***

Al medir con cinta un terreno cubierto por hierba o maleza, o cuando sopla viento fuerte, es imposible mantener siempre la cinta en toda su longitud en perfecta alineación con sus extremos. Este error se hace despreciable si el delantero toma precauciones para mantener bien estirada la cinta.

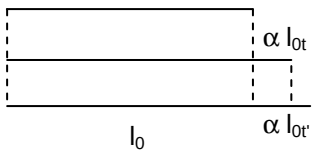
***Defecto de observación***

Los errores de plomada, lectura de la cinta y colocación de las fichas son errores accidentales que no se pueden eliminar, pero su efecto sobre el error total resulta muy poco importante.

***Influencia de la temperatura***

Las cintas se dilatan al aumentar la temperatura y se contraen cuando ésta baja. Es decir que si la cinta se ha contrastado a una cierta temperatura y después se usa a una temperatura más alta, la longitud determinada es mayor que la real. Para una variación de temperatura de 8ºC, una cinta de acero de 30m experimenta un cambio de longitud de 3mm, dando lugar a un error de casi 10cm/km. Algunas cintas llevan en uno de sus extremos una escala de temperaturas, mediante la cual puede hacerse la corrección térmica sin cálculo alguno.

***Corrección.*** El coeficiente de dilatación térmica del acero es de 0,000012 por 1ºC. Si la cinta se ha contrastado a una temperatura de t grados y la medición se hace a la temperatura de t' grados, la corrección Cx para la variación de longitud está dada por la fórmula:




Cinta a una temperatura de 0ºC.

Cinta a una temperatura de 20ºC (temperatura de contraste). l = lt

Cinta a temperatura ambiente en el momento de la medición. l = lt'

$\alpha$ es el coeficiente de dilatación del material de la cinta.

Magnitud del error:

lt = lo + $\alpha$. lo.t

lt' = lo + $\alpha$. lo.t'

$\varepsilon$ = O - V = lt – lt'

$\Rightarrow \varepsilon = \alpha$. lo (t – t') = - $\alpha$. lo (t' - t)

Ejemplo: t = 21ºC; t' = 50ºC; l0 = 50m; $\alpha$ = 0,000012. 1/ºC

$$\varepsilon = -\frac{0{,}000012}{1^{o}C}.50m.(50^{o}C - 21^{o}C) = -\frac{0{,}000012}{1^{o}C}.50m.(29^{o}C) = -0{,}017m$$

$$\varepsilon_r = -\alpha..(t'-t) = -\frac{0{,}000012}{1^{o}C}.(29^{o}C) = -\frac{1}{300}$$

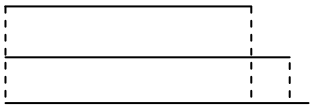
La dilatación de la cinta hace que la lectura indique valores menores de longitud que los reales: en el ejemplo, la lectura real es de 50m más 1,7cm, puesto que la cinta se ha estirado por efecto de la temperatura. Es por ello que el error por dilatación lleva un signo negativo en la expresión.

Los errores debidos a variaciones de temperaturas quedan muy reducidos empleando cintas de metal invariable.

***Influencia del esfuerzo tirante***

Si esta tensión es menor que aquella con que se contrastó la cinta, la longitud leída será mayor que la real; por el contrario, si la tensión aplicada es mayor que la de contraste, la cinta indicará una longitud menor que la verdadera.

Este error es siempre despreciable, salvo el caso de necesitarse una extremada precisión. En una cinta de acero de 30m, un cambio de tensión de 1,5 kg ocasiona una variación en su longitud de 0,3 mm.



l0 - Longitud de la cinta sin aplicar esfuerzo tirante.

lf - Longitud de la cinta al realizar el contraste.

lf' - Longitud de la cinta al medir en campaña.

Sean:

F - fuerza tirante de contraste.

F' - fuerza tirante en campaña.

$\Delta$lf - longitud de alargamiento de contraste.

$\Delta$lf' - longitud de alargamiento en la medición.

S - sección de la cinta (usualmente, de 2mm$^2$).

E - Módulo de elasticidad longitudinal del material (Módulo de Young).

Magnitud de los estiramientos: $\Delta l_f = \frac{F.l_0}{S.E}; \Delta l_{f'} = \frac{F'.l_0}{S.E}$

$$l_f = l_0 + \Delta l_f = l_0 + \frac{F.l_0}{S.E}$$

$$l_{f'} = l_0 + \Delta l_{f'} = l_0 + \frac{F'.l_0}{S.E}$$

$$\varepsilon = l_f - l_{f'}$$

Error absoluto: $\varepsilon = \frac{l_0}{S.E}.(F - F')$ Error relativo: $\varepsilon_r = \frac{F - F'}{S.E}$

Ejemplo: F = 5kg; F' = 10kg; l0 = 50m; S = 2mm$^2$; E = 21000 kg/mm$^2$.

$$\varepsilon_r = \frac{5kg - 10kg}{2mm^2.21000\ kg/mm^2} = \frac{-5}{42000} = -\frac{1}{8400}$$

Como el valor del módulo de elasticidad longitudinal del acero es constante hasta al menos los 2400 kg/cm$^2$, no se cometerán errores en este tipo de estimaciones. La sección normal de la cinta puede calcularse conociendo su peso y dimensiones, recordando que el acero tiene un peso específico de 8 kg/dm$^3$.

***Error por espesor de la manija***

Se produce en general en el desarrollo de mediciones de varias cintadas. La longitud l de la cinta corresponde a la distancia entre las partes exteriores de los estribos.

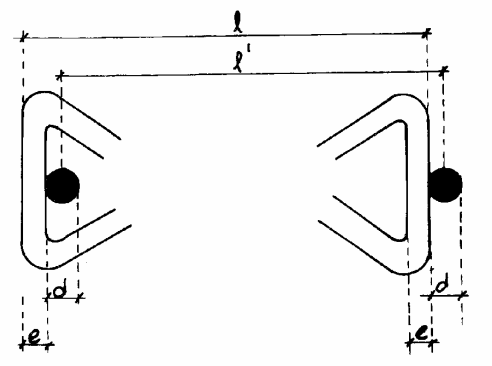



Figura 17.

d - espesor de la aguja o ficha.

e - espesor de la manija (estribo).

l - longitud de la cinta.

l' - longitud relevada.

ε = O - V = l - l' = l - (l - e - ½ d + ½ d) = l - l + e ⇒ ε = e
Error absoluto en el total.

Error relativo: $\varepsilon_r$ = e / l

Ejemplo: e = 4mm, l = 50m

$$\varepsilon_r = \frac{0{,}004m}{50m} = \frac{1}{12500}$$ ⇒ Se trata de un error de muy poca importancia.

### *Cinta combada o error por catenarias*

Cuando la cinta no está tendida sobre el suelo en toda su longitud, sino sólo apoyada o suspendida en sus dos puntos forma una curva en el centro. Cuando la cinta se suspende toma forma de una curva llamada catenaria. La corrección que hay que aplicar es la diferencia entre el arco y la cuerda correspondiente (Fig. 18).

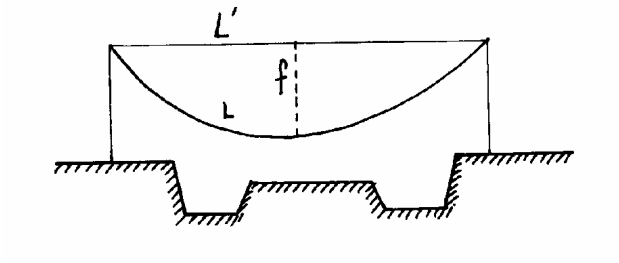



Figura 18.

L' - distancia entre los soportes de la cinta.

f - flecha producida por el peso propio de la cinta.

L - longitud medida, errónea a causa de la flecha y de la tensión aplicada.

Considerando la catenaria como arco de circunferencia:

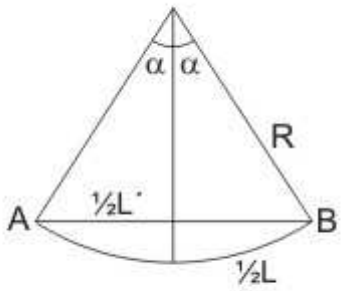



Figura 19.

$$\varepsilon = O - V = \widehat{AB} - \overline{AB} = L' - L$$

$$\frac{L'}{2} = R.sen\alpha; \quad \frac{L}{2} = R.\alpha \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = 2.R.\alpha - 2.R.sen\alpha = 2.R.(\alpha - sen\alpha)$$

$$Desarrollando: sen\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + ...$$

Despreciando los términos a partir del tercero, inclusive: $\varepsilon = \dfrac{R.\alpha^3}{3}$

En la expresión de la flecha:

$$f = R - R.\cos\alpha = R.(1-\cos\alpha)$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \ldots$$

$$\Rightarrow f = R.\left(1 - 1 + \frac{\alpha^2}{2}\right) = R.\frac{\alpha^2}{2}$$

$$f^2 = R^2.\frac{\alpha^4}{4} = \frac{3}{4}.\frac{R.\alpha^3}{3}.R.\alpha = \frac{3}{4}.\varepsilon.\frac{L}{2} = \frac{3.\varepsilon.L}{8}$$

Por lo tanto → Error absoluto: $\varepsilon = \frac{8.f^2}{3.L}$ Error relativo: $\varepsilon_r = \frac{8.f^2}{3.L^2}$

Ejemplo: f = 0,40m; L = 20m

$$\varepsilon_r = \frac{8.f^2}{3.L^2} = \frac{8.(0{,}40m)^2}{3.(20m)^2} = \frac{1}{938}$$

También se puede calcular el error debido a la catenaria con la fórmula:

$$\varepsilon = \frac{p^2.L^3}{24.T^2} = \frac{P^2.L}{24.T^2}$$

En la cual ε es el error absoluto y:

p - peso de la cinta (en kg por metro lineal).

L' - distancia entre soportes, en metros.

T - tensión (en kg).

P - peso total de la cinta que está entre apoyos (en kg).

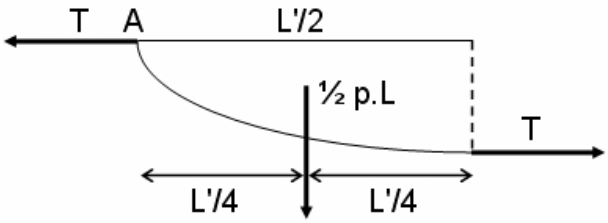



Figura 20.

Tomando momentos con respecto a A:

$$-T.f + p.\frac{L}{2}.\frac{L'}{4} = 0 \therefore f = \frac{p.L.L'}{8.T} \quad y \quad f^2 = \frac{p^2.L^2.L'^2}{64.T^2}$$

Remplazando por expresiones ya conocidas:

$$\varepsilon = \frac{8}{3.L}.\frac{p^2.L^2.L'^2}{64.T^2} = \frac{p^2.L.L'^2}{24.T^2}$$

$$\Rightarrow \varepsilon \cong \frac{p^2.L^3}{24.T^2}$$

La importancia del error por catenaria de las medidas ordinarias con cinta es grande, especialmente cuando se utilizan cintas pesadas.

Ejemplo: P = 0,0146 kg/m; L = 100m; T = 10kg.

$$\varepsilon = \frac{(0{,}0146 kg/m)^2.(100m)^3}{24.(10kg)^2} = \frac{1}{1125}$$

## Tolerancia

Tolerancia es el conjunto de prescripciones oficiales y fórmulas que fijan los errores límites o errores extremos para cada una de las distintas operaciones del agrimensor, tanto en mediciones lineales como en las angulares y las altimétricas.

Estas prescripciones no son igualmente exigentes para la ciudad (terreno urbano) como para el campo (terreno rural), así como también influyen las condiciones en que se realiza el trabajo de campo y que pueden ser condiciones favorables o condiciones difíciles; esta última situación se manifiesta en regiones montañosas, de bañados o con otro tipo de obstáculos para el desarrollo del levantamiento.

Suele expresarse como: $T = k_1.\sqrt{k_2.L + k_3.L^2}$

El primer término de la raíz representa los errores sistemáticos que pudieran arrastrarse, y el segundo término a los errores accidentales estimados.

La tolerancia está expresada en unidades de longitud.

Los coeficientes $k_1$, $k_2$ y $k_3$ se dan de acuerdo a características del terreno, es decir, según su ubicación y las condiciones de trabajo; $k_1$ y $k_3$ son adimensionales, mientras que $k_2$ y L (distancia medida) se expresan en las mismas unidades de longitud que la tolerancia T.

De acuerdo a las exigencias de "Las instrucciones para mensuras" de la Dirección General de Catastro de la Provincia de Santa Fe, la tolerancia para cada caso se expresa:

Polígonos rurales, en condiciones normales: $T = 0{,}01.\sqrt{4.L + 0{,}005.L^2}$

Ejemplo: L = 100m; T = 0,213m $\Rightarrow \varepsilon_r = \frac{1}{470}$

Polígonos rurales en condiciones difíciles: $T = 0{,}01.\sqrt{10.L + 0{,}0015.L^2}$

Ejemplo: L = 100m; T = 0,34m $\Rightarrow \varepsilon_r = \frac{1}{295}$

Se adopta en terrenos en zona montañosa, con montes, cursos de agua u otro tipo de dificultades.

Polígonos urbanos en frentes de manzanas: $T = 0{,}01.\sqrt{0{,}3.L + 0{,}0005.L^2}$

Ejemplo: L = 100m; T = 0,059m $\Rightarrow \varepsilon_r = \frac{1}{1700}$

Polígonos urbanos en el interior de manzanas: $T = 0{,}03.\sqrt{0{,}3.L + 0{,}0005.L^2}$

Ejemplo: L = 100m; T = 0,177m $\Rightarrow \varepsilon_r = \frac{1}{570}$

## Clasificación de levantamientos planimétricos de acuerdo a la precisión.

1. De baja precisión → Error relativo de 1:100 a 1:500.
2. De media precisión → Error relativo de 1:500 a 1:4000.
3. De alta precisión → Error relativo de 1:4000 a 1:20000.

En el cuadro siguiente se resumen las aplicaciones y precisiones normales de algunos métodos de medición de distancias:

| Método | Precisión | Uso |
|---|---|---|
| A pasos | 1:100 a 1:200 | Para reconocimientos, planos a escala pequeña, croquis preliminares en un levantamiento. |
| Por taquimetría | 1:300 a 1:1000 | Para levantamiento de detalles, poligonales poco precisas, para comprobar medidas más precisas. |
| Con cinta, con procedimiento ordinario. | 1:1000 a 1:5000 | Para levantamientos correspondientes a trabajos de vialidad, trabajos comunes de construcción y agrimensura. Triangulación de 4º orden. |
| Con cinta, con procedimiento de precisión. | 1:10000 a 1:30000 | Poligonales para levantamientos urbanos, bases para triangulaciones de precisión intermedia, trabajos de construcción muy precisos. |
| Con alambre invar. Medición de bases. | 1:50000 a 1:1000000 | Triangulación de alta precisión para grandes zonas, túneles largos, etc. |

## Nociones sobre Teoría de Errores

### Valor real de una magnitud

Para conocer las magnitudes hay que empezar por “medirlas”, es decir, compararlas con otras de su misma especie, que se toma por unidad, precisando el número de veces que la unidad se halle contenida en la magnitud que se mide. Esto es lo que se llama "observar" el valor de la magnitud, y el resultado numérico se denomina “observación”. Lo denominaremos con la letra x.

Es necesario diferenciar claramente las “magnitudes matemáticas” y las “magnitudes físicas”. Las primeras pueden medirse con exactitud absoluta; en cambio, las magnitudes físicas (distancia entre dos puntos del terreno, abertura de un ángulo, presión barométrica, etc.); es indudable que, en un momento dado, tienen su “valor real o exacto”; pero las imperfecciones de la vista, tacto y de los instrumentos y métodos de que disponemos para efectuar estas observaciones, así como factores ambientales como la refracción atmosférica, variaciones del viento y de la temperatura y otras causas, producen errores que hacen que en la práctica los “valores observados” sean distintos en cada medición, evidenciando la producción de **errores**.

### Errores

Los valores que obtenemos para las magnitudes que manejamos en Topografía son siempre erróneos, a causa de los instrumentos, la imperfección de los sentidos, y otros factores.

La producción de los errores está regida por ciertas leyes que es preciso conocer si se quieren efectuar con seguridad mediciones de cierta importancia (por ejemplo, en triangulación). Para ello es necesario conocer el origen de los errores, la manera en que se combinan y cómo se acumulan en una sucesión de operaciones elementales, para estar en condiciones de resolver algunos problemas de interés práctico, como es la determinación del error máximo (llamado también error temible), en una operación ejecutada en un instrumento dado y en condiciones también dadas, o recíprocamente, la fijación de la precisión de que debe tener el instrumento que se emplee para que en la operación considerada no se exceda una tolerancia fijada de antemano, la determinación del número de repeticiones o reiteraciones que será necesario efectuar con un instrumento menos exacto que el considerado para conseguir un resultado más preciso, y situaciones similares.

### Errores y equivocaciones

En todo lo que trataremos nos referimos siempre a “errores” y no a “equivocaciones’. Estas dos palabras, casi sinónimas en el lenguaje no especializado, tienen significados muy diferentes para nosotros.

Llamamos “errores” a los inevitables y generalmente pequeños a los que hemos aludido en el título anterior, y designaremos con el nombre de “equivocaciones”, a los errores procedentes de alguna distracción o confusión y, por lo tanto evitables totalmente. Por ejemplo, llevar mal la cuenta de las cintadas medidas, leer mal un vernier, etc. Por ser totalmente evitables, no nos ocuparemos de las equivocaciones.

### Clasificación de los errores

Por su naturaleza podemos clasificarlos en *sistemáticos* y *accidentales*.

Llamaremos *errores sistemáticos* a todos aquellos que obedecen a una ley conocida, por lo cual toman el mismo valor en las mismas circunstancias, independientemente del lugar y del tiempo; es un valor que puede calcularse para así aplicar a los resultados obtenidos una corrección que nos elimine tal error. También pueden eliminarse empleando procedimientos operatorios que hagan que se compensen entre sí dos o más de igual valor y distinto signo. Por ejemplo, en el Método Bessel en la medición de ángulos. Los errores sistemáticos se clasifican a su vez en: *constantes* y *variables*. Los primeros tienen siempre el mismo valor, como por ejemplo, cuando medimos una alineación con una cinta de acero que al comprobarla se observa que es cuatro centímetros más corta de lo normal: cada cintada está afectada de un error de —0,04m. Éste es un error sistemático constante, pues tiene siempre el mismo valor y el mismo signo, con lo cual basta multiplicar dicho valor por el número de cintadas medidas para que se tenga la corrección que, aplicada al valor observado nos suministre otro, exento de error.

Son errores sistemáticos variables aquellos que van adquiriendo valores distintos, según

las circunstancias, pero siguiendo, como todo error sistemático, una ley conocida. Por ejemplo, si una cinta de acero contrastada a cierta temperatura, es utilizada para hacer una medición a otra temperatura distinta, su longitud ha cambiado, dando origen a un error sistemático variable, pues depende de la diferencia entre las dos temperaturas; también su signo también está condicionado a dicha diferencia.

Llamaremos *errores accidentales* o *fortuitos*, a aquellos que no siguen una ley, sino que toman valores distintos y arbitrarios en circunstancias aparentemente idénticas. Podríamos decir que son aquellos que obedecen únicamente a la ley del azar. Tienen su origen en la imperfección de nuestros sentidos y en otras múltiples causas, siendo su característica principal la de presentarse tanto en un sentido como en el sentido contrario con la misma probabilidad, por lo cual se afectan de los signos **+** y -. Estos errores no admiten el cálculo de una corrección ni la posibilidad de una compensación operatoria regular y completa, pero se compensan parcialmente ellos mismos, aunque de un modo irregular. Por ejemplo, son errores accidentales los cometidos por la vista del operador al hacer la bisección de un jalón con un anteojo, o al apreciar las divisiones que coinciden en el vernier al medir un ángulo, o la apreciación del centro de un poste esquinero.

En caso concreto, el valor de estos errores accidentales difiere de una observación a otra aunque sean invariables el operador, el instrumento y el método empleado, así como las condiciones atmosféricas; entonces, resulta evidente que existe idéntica facilidad o probabilidad para cometerlos lo mismo en un sentido que en el otro, es decir, que sean positivos o negativos. De allí que suelen estar precedidos del signo **±**.

De lo antedicho se desprende que los errores sistemáticos, aun siendo pequeños, con frecuencia son mucho más perjudiciales que los accidentales pues, en general, los errores sistemáticos se suman y los accidentales tienden a compensarse, aunque sea en parte.

Además debemos aclarar que, en realidad, los errores sistemáticos y los accidentales, no se hallan al estado “puro”. Tanto es así que suele decirse que “el error es uno solo”, que su parte controlable es sistemática y la restante accidental. (Fig. 21).

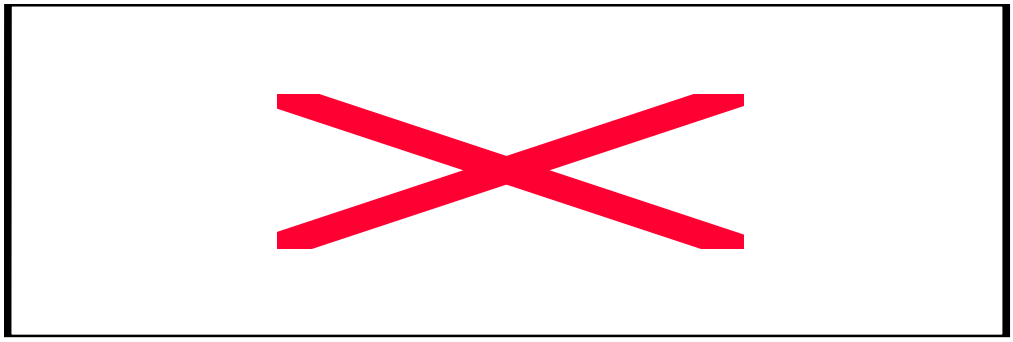


*Figura 21*

Así, un error al que por su naturaleza se califica como sistemático, como en el caso de la incidencia de la temperatura en la longitud de la cinta, tiene un aspecto accidental por el hecho de que la temperatura de 45ºC de la misma ha sido evaluada con una inseguridad de **±** 2ºC por ejemplo (intervalo dudoso de la Fig.21).

Algo similar ocurre con el error accidental cometido al leer un vernier: lleva implícito un matiz sistemático consistente en la tendencia personal de algunos a precisar siempre de más o de menos.

Pero dichos matices o aspectos son de escasa incidencia en la mayoría de los casos por lo cual no se los tiene en cuenta, en general.

Finalmente, debemos hacer una distinción especial entre los *errores reales* y los *errores aparentes*. Los primeros resultan de comparar las observaciones con el valor verdadero o exacto. Los llamaremos **e**.

Error verdadero = "observación" menos "valor exacto"

$$e = x - v$$

Los errores aparentes (o desvíos) resultan de comparar las observaciones con un valor considerado como el más probable, ya que no se conoce el valor exacto de la magnitud en cuestión. Los designaremos con **v**.

Error aparente = "observación" menos "valor probable"

Como valor probable se torna el promedio de las observaciones: $x_m = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$

Entonces: **v = x - $x_m$**

Como ejemplo del primero podemos mencionar el error que se obtiene de restar la suma de los ángulos de un triángulo (medidos con algún instrumento en el terreno) menos 180º, que es el valor real de la suma de ángulos interiores de un triángulo: $e = \Sigma A_i - 180º$

Podemos ejemplificar para el segundo la resta de una medición con cinta de una distancia, menos el promedio de las distintas mediciones de la misma distancia: $v = L - \frac{L_1 + L_2 + ... + L_n}{n}$

Algunos autores llaman a **v** "desviación".

**Media aritmética simple**

Supongamos que medimos una magnitud n veces con igual esmero, en las mismas condiciones ambientales, obteniendo los valores $x_1, x_2, ..., x_n$.

Dado que todas esas mediciones nos ofrecen igual grado de fe (en teoría de errores se dice que todas tienen el mismo peso), la intuición nos dice que lo más razonable es adoptar como valor probable de x a la media aritmética o promedio de las observaciones efectuadas.

$$x_m = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{\sum x_i}{n}$$

Más adelante veremos cómo se establece el grado de aproximación de $x_m$ con respecto al valor exacto (que no se conoce por tratarse de errores aparentes). A continuación, daremos un ejemplo consistente en dos series de mediciones de una misma distancia efectuada por dos equipos distintos de operadores:

**Serie 1**

| | **x** [m] | **v** [cm] | **$v^2$** [$cm^2$] |
|---|---|---|---|
| **$x_1$** | 604,27 | -34 | 1156 |
| **$x_2$** | 605,35 | 74 | 5476 |
| **$x_3$** | 604,64 | 3 | 9 |
| **$x_4$** | 604,19 | -42 | 1764 |
| | $\Sigma x_i$ = 2418,45 | | $\Sigma v^2$ = 8405 |

$$x_m = \frac{\sum x_i}{n} = 604{,}61m$$

**Serie 2**

| | **x** [m] | **v** [cm] | **$v^2$** [$cm^2$] |
|---|---|---|---|
| **$x_1$** | 603,84 | -36 | 1296 |
| **$x_2$** | 603,97 | -23 | 529 |
| **$x_3$** | 604,69 | 49 | 2401 |
| **$x_4$** | 604,30 | 10 | 100 |
| | $\Sigma x_i$ = 2416,8 | | $\Sigma v^2$ = 4326 |

$$x_m = \frac{\sum x_i}{n} = 604{,}20m$$

Hemos llegado a dos promedios distintos: 604,61m en la serie 1 y 604,20m en la serie 2.

Para decidir sobre la calidad de estas mediciones el concepto de *error medio cuadrático*, cuya expresión, por definición es la siguiente, en forma simbólica:

$$\boxed{m = \sqrt{\frac{\sum e^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum v^2}{n-1}}}$$

según se trate de errores verdaderos o aparentes, respectivamente.

Conviene aclarar que este valor de m da idea sobre la calidad de las mediciones y es aplicable a cualquiera de las observaciones de cada serie de mediciones (se le llama también "índice de precisión").

Volviendo a nuestro ejemplo de ambas series de mediciones:

$$m_1 = \sqrt{\frac{\sum v^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{8605}{3}} = \pm 54cm \qquad m_2 = \sqrt{\frac{\sum v^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{4326}{3}} = \pm 38cm$$

Se observa que la serie 2 tiene menor "error medio" de observación.

El valor m se denomina también "índice de precisión" y en torno a él gira toda la teoría de los errores.

Podemos concluir que la serie 2 es más precisa que la 1.

**Error absoluto y error relativo**

El cociente entre el error absoluto y la magnitud medida (o calculada) se denomina *error relativo***.** En esta definición error absoluto es los que hasta ahora llamamos simplemente "error'.

En las mediciones lineales el error relativo es más representativo de su precisión que el error absoluto, pues éste, si no se consigna la magnitud medida, carecería de significación.

El error relativo es, pues, sinónimo de precisión lineal y se acostumbra expresarlo como una fracción con la unidad como numerador.

Por ejemplo:

Error absoluto: 5 cm.

Longitud medida: 502,34 m

Error relativo: $\frac{5cm}{50234cm} = \frac{1}{10047} \cong \frac{1}{10000}$

Lo contrario ocurre con las mediciones angulares; allí es el error absoluto el que expresa la precisión angular, no tiene sentido el error relativo en mediciones angulares.

**Error medio del promedio**

En nuestro estudio hemos considerado como valor más probable el promedio de las observaciones ($x_m$) al no conocer el valor exacto. Pero es evidente que con ello cometemos un error al imponer este valor como magnitud verdadera. Este error se denomina *error medio del promedio* y en teoría de errores se demuestra que tiene la siguiente expresión:

$$\boxed{M = \frac{m}{\sqrt{n}}}$$

Dado que los errores que estamos tratando son accidentales, es evidente que cuanto mayor sea n (número de observaciones), más pequeño será el error medio del promedio, pues tenderán a compensarse y $x_m$ se acercará cada vez más al valor verdadero. Esto se muestra en la Fig. 22, en la cual se acotaron en el eje de las ordenadas los valores de M y los de n en el eje de las abscisas. Es decir que repitiendo las observaciones de una misma magnitud, se aumentará la precisión del promedio de las observaciones.

A este parámetro se lo denomina también "índice de exactitud".

Volviendo al ejemplo anterior de las dos series de mediciones:

$$M_1 = \frac{\pm 54cm}{\sqrt{4}} = \pm 27cm \qquad M_2 = \frac{\pm 38cm}{\sqrt{4}} = \pm 19cm$$

La expresión del error medio del promedio nos permite resolver una serie de problemas, como los siguientes:

**1.** Se exige conocer el valor de un ángulo con una exactitud de M = ±5". Si se cuenta con un teodolito cuyo vernier permite apreciar los 10" (m). ¿Cuántas veces conviene medir el ángulo?

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} \therefore n = \frac{m^2}{M^2} = \frac{(10'')^2}{(5'')^2} = 4$$

**2.** Si se cuenta con un teodolito que permite apreciar los 20" y se mide un ángulo 5 veces (por reiteración). ¿Qué exactitud tendrá el promedio?

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{20''}{\sqrt{5}} = \pm 9''$$

**3.** Se mide un ángulo por reiteración 6 veces. Si se desea que el promedio tenga una exactitud de 5".¿Cuál debe ser la apreciación en el teodolito de las lecturas?

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} \therefore m = M.\sqrt{n} = 5''.\sqrt{6} = \pm 12''$$

Estas consideraciones tienen como única finalidad puntualizar que el valor del error medio de una función ($m_x$) dependerá de la cantidad de reiteraciones que efectuemos en la medición de las variables, cantidad que a su vez será dispar atendiendo a las incidencias de las variables.

Ello se tiene muy en cuenta en la programación de las mediciones. Siempre se debe partir de la precisión requerida para el valor de la magnitud, que surgirá del análisis de la necesidad técnica que debe cumplimentarse. Es decir, debemos fijar de antemano, el valor de $m_x$ ó $M_x$ que seré la exigencia del problema y luego elegir el instrumental y procedimientos de medición de las variables de que depende la función, atendiendo a las respectivas incidencias de cada variable. Esto último se verá más adelante en "propagación de los errores". Procediendo así, habremos medido correctamente, evitando imprecisiones que conducen a precisiones insuficientes, o bien exageradas cuando el operador actúa con temor, traduciéndose ambos casos extremos en mayor gasto de tiempo y dinero.

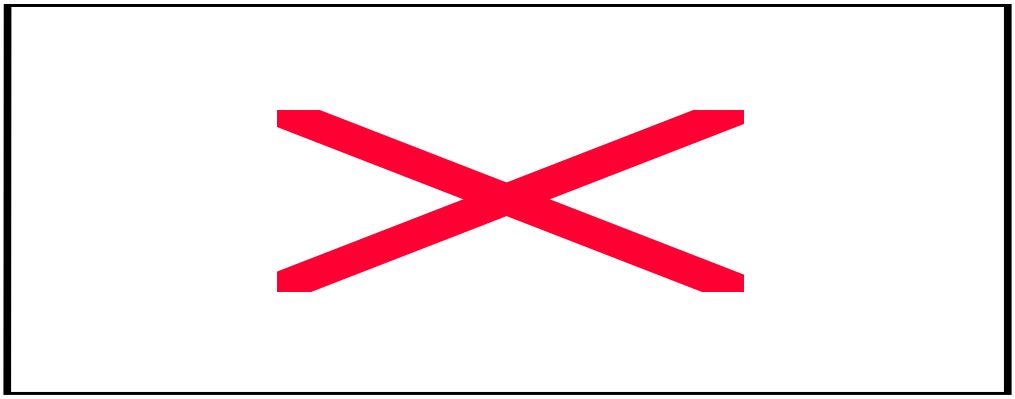


*Figura 22*

| n | 1 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 26 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M = \frac{m}{\sqrt{n}}$ | m | 0,5m | 0,36m | 0,29m | 0,25m | 0,22m | 0,20m | 0,19m | 0,18m | 0,17m |

**Ley de repartición de los errores accidentales**

Se llama probabilidad de un suceso S a la relación entre el número de casos favorables a la producción de un suceso y el número total de casos (favorables o adversos), en el supuesto de que todos los casos sean igualmente posibles. Por lo tanto, la probabilidad de la producción de un suceso es siempre un número fraccionario. Cuando el numerador es igual al denominador se tiene la unidad (certidumbre) y cuando el numerador es cero, se tiene cociente cero (imposibilidad).

Tratándose de errores, tendremos que la probabilidad de cometer un error $\varepsilon$ de determinada magnitud viene dada por la relación entre el número *p* de errores del mismo valor y el número *q* total de errores, es decir: $\text{Probabilidad} = p/q$

La principal característica de los errores accidentales es que los errores más pequeños son los más frecuentes; existe, por consiguiente, una cierta relación entre la magnitud de estos errores y su probabilidad.

La investigación empírica de esta ley es fácil concebir, ya que es suficiente repetir un gran

número de veces la misma medición, eliminando los errores sistemáticos y hallando después los errores residuales (aparentes), comparando el resultado de cada observación con el valor medio que se adopta como valor más probable.

Para realizar esto, consideremos los resultados de una serie de mediciones $x_1$, $x_2$, $x_3$,..., $x_n$ y la media aritmética $x_m$ de estos resultados considerada como valor más probable de ellos. Los errores aparentes de esta serie de observaciones son:

$\varepsilon_1 = x_1 - x_m$; $\varepsilon_2 = x_2 - x_m$; $\varepsilon_3 = x_3 - x_m$; .... $\varepsilon_n = x_n - x_m$

Tracemos dos ejes coordenados y llevemos sobre el eje de las abscisas, a partir del origen O, longitudes proporcionales a las magnitudes de los errores, y en cada punto de división levantemos ordenadas que en escala elegida representen el número de cada uno de los errores correspondientes. La curva determinada por los extremos de estas ordenadas representa la ley de repartición de los errores cometidos en la serie de observaciones considerada.

El examen de esta curva experimental nos pone de manifiesto las siguientes propiedades:

1. La curva es simétrica con respecto al eje OY, o sea que el error $+\varepsilon$ se comete el mismo número de veces que el error $-\varepsilon$: por ello hay tantos errores positivos como negativos.
2. El eje de las abscisas es asíntota a la curva, por lo que habrá un error que puede considerarse, en la escala del dibujo, como el error máximo (error temible).
3. A medida que va aumentando el valor de la abscisa, disminuye el de la ordenada, lo que indica que la frecuencia de los errores está en relación inversa con el valor de éstos.

La curva a que se llega <u>siempre</u> tiene la misma forma que la campana que se ve en la Fig. 23, cuando el número de observaciones es lo suficientemente grande y las observaciones tienen igual precisión, es decir el mismo error medio cuadrático m corresponde al valor de $\varepsilon$ para el punto de inflexión de la curva.

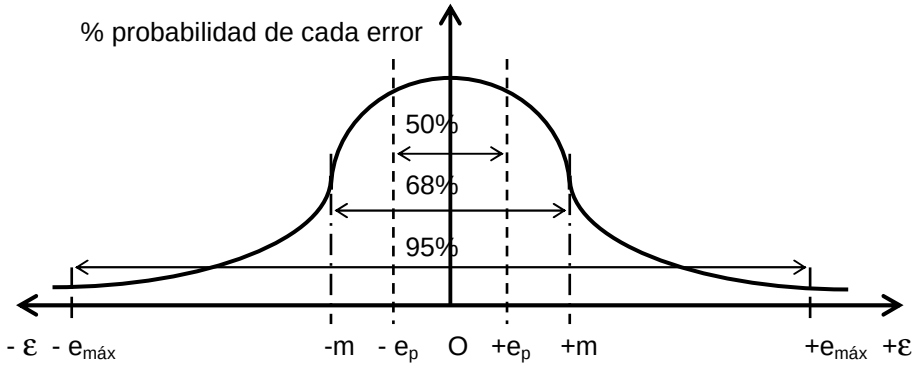



*Figura 23*

**<u>Ley de probabilidad o frecuencia de los errores</u>**

Ya hemos definido la probabilidad de cometer un error, por ello, si llamamos N al número total de errores, y n al número de errores de la magnitud considerada $\varepsilon$, la probabilidad de cometer un error $\varepsilon$ viene dada por la relación n/N.

Por ejemplo, si N = 1000 y n = 100, la probabilidad de cometer el error considerado es 100/1000 = 1/10, lo que quiere decir que para observaciones de la misma precisión, el número de errores de la magnitud considerada ($\varepsilon$) será siempre la décima parte del número total de observaciones.

El valor *m* corresponde al $\varepsilon$ para el punto de inflexión de la curva y se demuestra que es el que tiene la probabilidad de que el 68% del número total de los tengan un valor inferior y 32% un valor mayor, siempre en valor absoluto. (Fig. 23)

**<u>Error probable</u>**

Es el que tiene la probabilidad de que su valor sea tal que la mitad del número total de los errores tengan un valor superior y la mitad restante, un valor inferior.

Se demuestra que: $\boxed{e_p = \frac{2}{3} m}$

Algunos autores llaman equiprobable a este error.

Es decir que el error probable tiene una probabilidad de ½ (o del 50%)

Para el ejemplo dado:

$$e_{p1} = \frac{2}{3}.m = \frac{2}{3}.(\pm 54cm) = \pm 36cm \qquad e_{p2} = \frac{2}{3}.m = \frac{2}{3}.(\pm 38cm) = \pm 25cm$$

**Error máximo (o error temible)**

Es el error cuyo valor tiene la probabilidad de que el 99% del número total de los errores tengan un valor menor que el mismo y por supuesto, sólo el 0,3% del número total de los errores supere esa cantidad. Es decir la probabilidad del error máximo es de 0,3/100.

Se demuestra que: $\boxed{e_{máx} \cong 3.m \cong 4.e_p}$

Para el mismo ejemplo anterior se tiene:

Serie 1: $e_{máx}$ = 3.(± 54cm) = ± 162cm

Serie 2: $e_{máx}$ = 3.(± 38cm) = ± 114cm

**Propagación de los errores (incidencia del error de cada variable en el error de la función)**

1. Producto de una constante por una variable

Se demuestra en teoría de errores que el error del producto de una constante por una variable es el producto de la constante por el error de la variable (que es la magnitud que se mide).

Si X =x. a $\Rightarrow$ $\boxed{mX = a.\ mx}$

Por ejemplo: sea una circunferencia cuyo diámetro d se midió con un error medio cuadrático de m = ±1 cm. ¿Cuál será el error medio del valor de la longitud de la circunferencia correspondiente?

C = $\pi$. d

**mC** = $\pi$. md = 3,14. (± 1cm) = **±3,14cm**

2. Suma de varias mediciones

Se demuestra que el error medio de una suma de mediciones parciales es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los errores medios de cada una de las mediciones aisladas.

Si $X = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \Rightarrow \boxed{mX = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_n^2}}$

Si además $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ resulta: $m_1 = m_2 = \ldots = m_n \Rightarrow \boxed{mX = m.\sqrt{n}}$

Este último caso se presenta frecuentemente en topografía; por ejemplo, en la medición de distancias con cinta, en la que cada tramo es de 50 m; en la nivelación geométrica compuesta, donde se procura guardar equidistancia entre el nivel de anteojo y la mira, etc.

Ejemplo: un operador sabe que su teodolito le permite medir los ángulos con un error medio cuadrático de ±15”. ¿Cuál será el error medio para la suma de los ángulos medidos en los 16 vértices de una poligonal cerrada?

$$mX = m.\sqrt{n} = \pm 15''.\sqrt{16} = \pm 15''.4 = \pm 60'' = \pm 1'$$

3. Función lineal

De los casos 1 y 2 se deduce que si: $X = a_1.x_1 + a_2.x_2 + a_3.x_3 + \ldots + a_n.x_n$

Entonces: $\boxed{mX = \sqrt{a_1^2.m_1^2 + a_2^2.m_2^2 + \ldots + a_n^2.m_n^2}}$

4. Función no lineal

Queda ver el caso de una función no lineal, de varias variables: $X = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$, que es el caso ilustrado en la Fig. 24.

Como ejemplo: Se desea calcular el valor de la longitud del lado **a** teniendo como datos el lado **c** medido en el terreno y los ángulos $\alpha$ y $\gamma$, también medidos en el terreno.

Es decir: $a = f(c, \alpha, \gamma)$

Si repetimos n veces las mediciones la expresión del error cuadrático medio será de acuerdo con deducciones que se realizan en la teoría de errores:

$$mX = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 .m_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 .m_2^2 + ... + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 .m_n^2}$$

Esta fórmula expresa en forma general la propagación de los errores, observándose que las fórmulas designadas en 1., 2. y 3., son expresiones particulares de la que figura en 4.

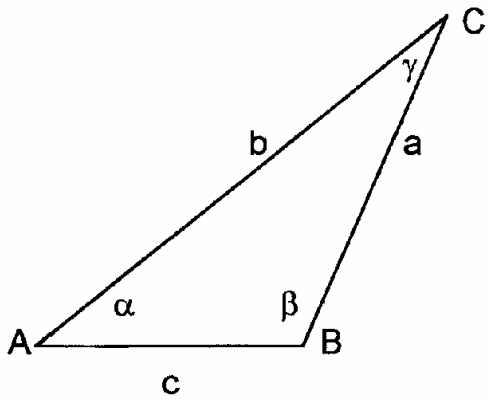



*Figura 24*

**Límite de los errores admisibles**

Cuando se vio error máximo se dijo que éste señala el límite pasado el cual los errores pueden considerarse "groseros", o equivocaciones. Por lo tanto el error máximo es el que se toma como límite admisible de los errores, que se suele denominar *Tolerancia*. Los errores más grandes que se presentan son generalmente imputables a equivocaciones, y, por lo tanto, pueden ser evitados totalmente teniendo cuidado en las mediciones.

Ejemplo: con un goniómetro cuyo error cuadrático medio es de 30" se han medido los ángulos interiores de un polígono de 16 lados. La suma de estos ángulos medidos en el terreno es de 2520º 03' 30". La suma exacta debe ser $\Sigma$= 180º.(n - 2)= 180º.14 =2520º

La diferencia de 3' 30" entre estos dos números representa, evidentemente, la suma algebraica de los errores de los 16 ángulos, y se desea saber si esa diferencia puede considerarse como admisible.

Para averiguarlo se calcula primeramente el error medio total que puede cometerse en la suma de los 16 ángulos medidos. (ver propagación de errores caso 2)

$$mX = m.\sqrt{n} = 30''.\sqrt{16} = 120'' = 2'$$

Luego: $e_{máx}$ =3. mX = 3.120'' = 360'' = 6'

La suma de los errores efectivos es de 3' 30" y, por lo tanto, puede considerarse como admisible, es decir:

$$mX < e_{máx}$$

Si la suma efectiva de los errores hubiera superado el valor de 6' = 360", por ejemplo, 400", esta circunstancia se debería atribuir a haber incurrido, al hacer las observaciones, en equivocaciones y

entonces sería necesario comprobar las mediciones para procurar corregir estas inexactitudes.

El mismo procedimiento se emplearía para averiguar la diferencia admisible entre dos determinaciones consecutivas de una misma magnitud, para hallar, por ejemplo, el error admisible de cierre de una nivelación.

**Eliminación de observaciones (errores groseros)**

La expresión de $e_{máx}$ permite, cuando el número de observaciones es "suficientemente grande", eliminar directamente aquellos errores cuyo valor (error aparente), supere en magnitud el $e_{máx}$ = 3. m (m = error cuadrático medio).

Volviendo al ejemplo anterior podemos observar que en ninguna de las dos series se tiene que descartar ningún valor de los errores aparentes (observaciones todas aceptadas) pues el $e_{máx}$ supera el valor de cualquiera de los errores de las dos series. Pero puede ocurrir, como se verá en el ejemplo siguiente, que exista alguna observación cuyo valor supere al $e_{máx}$ por lo cual se debe eliminar y recalcular el problema con los valores restantes.

Ejemplo:

| Observaciones | Fracción de grado | Errores $v = x - x_m$ | $v^2$ |
|---|---|---|---|
| 137º 03' 30" | 210" | -99" | 9801 |
| 137º 03' 55" | 235" | -74" | 5476 |
| 137º 05' 20" | 320" | 11" | 121 |
| 137º 05' 20" | 320" | 11" | 121 |
| 137º 05' 20" | 320" | 11" | 121 |
| 137º 07' 51" | 471" | 162" | 26244 |
| 137º 04' 50" | 290" | -19" | 361 |
| 137º 04' 50" | 290" | -19" | 361 |
| 137º 05' 25" | 325" | 16" | 256 |
| | $\Sigma$ x = 2781" | | $\Sigma v^2$ =42862 |

$$\frac{2781''}{9} = 309'' \quad \Rightarrow \quad x_m = 137º05'09''$$

$$m = \sqrt{\frac{\sum v^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{42862}{8}} = \pm 73{,}20''$$

$$e_{máx} = 3.m = 219{,}6''$$

Como $e_{máx}$> 162" no podríamos eliminar la observación 137º 07' 51". Pero en rigor esto se cumple para un número grande de observaciones, con lo que disminuye el valor de m.

Pero aumentar el número de observaciones puede resultar antieconómico. Para salvar este inconveniente, se han propuesto muchos criterios, de los cuales adoptaremos por su sencillez, el criterio de la "exclusión provisoria". Esta consiste en excluir provisoriamente la observación presuntamente afectada por un error grosero y calcular el $e_{máx}$ con las restantes. Luego se compara este valor con el del error (v) que tendría el valor excluido y si se verifica que $e_{máx}$<v se elimina la observación "sospechosa". En caso contrario, debe integrar la lista.

Siguiendo con el ejemplo anterior, observemos que la observación 137º 07' 51" es bastante diferente del resto. Por lo tanto recalcularemos la serie, pero con la exclusión de este valor:

| Observaciones | Fracción de grado | Errores $v = x - x_m$ | $v^2$ |
|---|---|---|---|
| 137º 03' 30" | 210" | -79" | 6241 |
| 137º 03' 55" | 235" | -54" | 2916 |
| 137º 05' 20" | 320" | 31" | 961 |
| 137º 05' 20" | 320" | 31" | 961 |
| 137º 05' 20" | 320" | 31" | 961 |
| 137º 04' 50" | 290" | 1" | 1 |
| 137º 04' 50" | 290" | 1" | 1 |
| 137º 05' 25" | 325" | 36" | 1296 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $\Sigma$ x = 2310'' | | $\Sigma$ $v^2$ =13338 |

$$\frac{2310''}{8} = 289'' \quad \Rightarrow \quad x_m = 137º04'49''$$

$$m = \sqrt{\frac{\sum v^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{13338}{7}} = \pm 43{,}65''$$

$$e_{máx} = 3.m = 130{,}95'$$

El valor del desvío de la observación eliminada es:

v = 471” - 289” = 182” > $e_{máx}$.

Por lo tanto, debe descartarse la observación 137º 07’ 51” pues entra en el terreno de los errores groseros que tienen la probabilidad de sólo el 0,3% de presentarse.

**Mediciones ponderadas**

Mediciones ponderadas son aquellas que, por diversas circunstancias, ofrecen distinto grado de confianza, lo cual se traduce en un número (denominado *peso*) que representa la cantidad de veces imaginarias que uno mide esa distancia, para que el promedio se acerque más al valor de la magnitud real medida.

Los pesos se eligen de acuerdo al criterio de topógrafos experimentados o proporcionalmente a los cuadrados de los errores cuadráticos medios, en el caso de varias observaciones realizadas en iguales condiciones.

El esquema de trabajo es:

| $x_i$ | $p_i$ | $p_i.x_i$ | $v_i = x_i - x_{mp}$ | $v_i^2$ | $p_i.v_i^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| | $\Sigma$ $p_i$ | $\Sigma$ $p_i.x_i$ | | | $\Sigma$ $p_i.v_i^2$ |

Se definen los siguientes parámetros:

Media ponderada: $x_{mp} = \frac{\sum p_i.x_i}{\sum p_i}$

Error cuadrático medio ponderado: $m_p = \sqrt{\frac{\sum p_i.v_i^2}{n-1}}$

Error medio del promedio ponderado: $M_p = \frac{m_p}{\sqrt{\sum p_i}}$

Las expresiones para los errores probables y los admisibles no difieren de las empleadas en los casos generales.

**Consideraciones sobre precisión y exactitud**

Algunos autores proponen un ejemplo que ya es clásico, para mostrar, en forma intuitiva, la diferencia entre precisión y exactitud.

Supongamos un tiro al blanco (Fig. 25), en el que aparecen los impactos, realizados por un mismo tirador, con la misma arma y sin variar la distancia de tiro. Dichos impactos pueden considerarse concentrados en el punto O', centro de gravedad de todos los impactos, a pesar de que el tirador dirigió siempre su puntería hacia O. Otro tirador obtuvo en otro blanco los resultados que se aprecian en la figura 26.

Para no complicar el problema, supongamos que los centros O’ en ambas figuras, están a igual

distancia de O.

Es evidente que en la figura 25 se nota una pequeña dispersión de los impactos. Podemos asimilar la distancia de cada impacto al centro O' como el error aparente o desvío: $v = x - x_m$.

Por lo tanto, el error cuadrático medio correspondiente a figura 25 es menor que en el caso de la figura 26. Se dice entonces que el tirador de figura 25 tuvo mayor precisión que el otro: se visualiza así que la precisión está dada por el valor del error cuadrático medio (m).

Ahora bien: en las dos figuras el centro de concentración de los disparos O' está a una distancia 00' del centro del blanco, que, en ambas figuras se han considerado de iguales. Esta distancia muestra la exactitud y, al hacer una comparación con los parámetros representativos de los errores podemos asimilar esta distancia al valor del error medio del promedio. (M). Se dice entonces que para el caso de la figura 26 hubo igual exactitud que en la figura 25.

Volviendo al primer ejemplo dado para el tratamiento de los errores, se observa que en la segunda serie, mayor será su exactitud. No obstante, puede suceder (por negligencia, descuido o ignorancia) que la presencia de errores sistemáticos no evaluados debidamente, haya desplazado igualmente todos los valores de las observaciones, y, consecuentemente a su promedio, lo que se traduciría en el ejemplo del tiro al blanco, un desplazamiento de O con respecto a O'. En tal caso, su precisión sería grande (m pequeño), pero escasa su exactitud (M grande).

Finalmente, debemos concluir que una serie que tiene "buena precisión" puede no tener aceptable exactitud, pero si tiene "buena exactitud', necesariamente debe tener similar precisión, salvo casos casuales de series de gran dispersión de valores, cuyo promedio, por coincidencia, difiera muy poco del "valor exacto"; esto es posible, pero muy improbable.

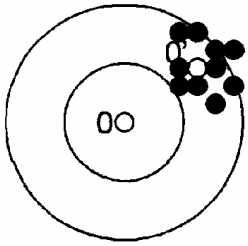



*Figura 25*

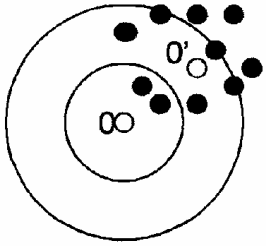



*Figura 26*