LÍNEAS ADAPTADAS, o CON CARGA CARACTERÍSTICA, Y SIN PÉRDIDAS - POTENCIA NATURAL (SIL)

- En este caso especial en el que $Z_c = Z_R$

$$\begin{cases} V(x) = V_R \cdot e^{+\gamma x} \\ I(x) = I_R \cdot e^{+\gamma x} \end{cases}$$

¡Notar que no habrá Onda Negativa o Inversa!

- Y si además R = 0 → α = 0

$$\begin{cases} V(x) = V_R \cdot e^{+j\beta \cdot x} \\ I(x) = I_R \cdot e^{+j\beta \cdot x} \end{cases}$$

- Esto significa que

$$\begin{cases} |V(x)| = |V_R| = |V| \\ |I(x)| = |I_R| = |I| \end{cases} \quad \textit{para todo valor de " x"}$$

- Las tensiones, en módulo, son las mismas en todos los puntos de la Línea. Lo mismo pasa con las corrientes. ¡No hay caída de tensión (en módulo) a lo largo de la Línea!

- En cualquier punto "x" de la Línea

$$S(x) = P(x) + jQ(x) = V(x) \cdot I^*(x)$$

$$S(x) = \left(V_R \cdot e^{+j\beta \cdot x}\right) \cdot \left(\frac{V_R \cdot e^{+j\beta \cdot x}}{Z_c}\right)^*$$

$$S(x) = \left(V_R \cdot e^{+j\beta \cdot x}\right) \cdot \left(\frac{V_R \cdot e^{-j\beta \cdot x}}{Z_c}\right)$$

$$S(x) = \frac{|V_R|^2}{Z_c} = P(x) + j0$$

- Cuando $V_R = V_{Nominal}$

$$SIL_{Monofásica} = \frac{|V_N|^2}{Z_c}$$

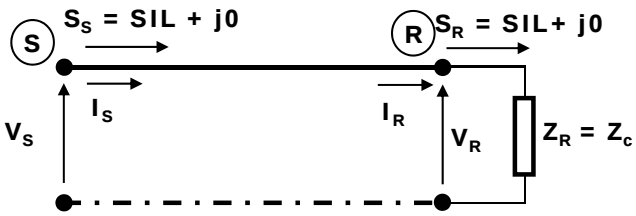
$$SIL = 3 \cdot \frac{|V_N|^2}{Z_c} = \frac{|U_N|^2}{Z_c}$$

Potencia Natural (Trifásica)

LÍNEAS ADAPTADAS, o CON CARGA CARACTERÍSTICA, Y SIN PÉRDIDAS - POTENCIA NATURAL (SIL)

- Cuando "x = l"

$$\begin{cases} V_S = V_R \cdot e^{+j\beta \cdot l} \\ I_S = I_R \cdot e^{+j\beta \cdot l} \end{cases}$$



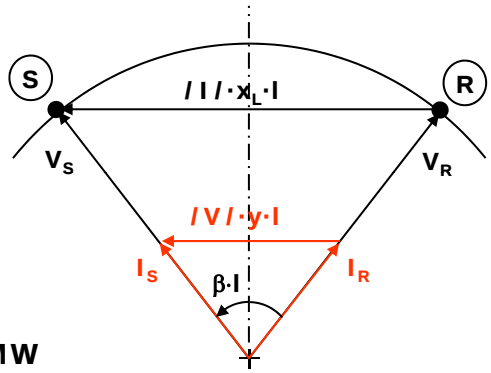
- Del diagrama fasorial

$$sen\left(\frac{\beta \cdot l}{2}\right) = \frac{|I| \cdot x_L \cdot \frac{l}{2}}{|V|} = \frac{|V| \cdot y \cdot \frac{l}{2}}{|I|}$$

$$|I|^2 \cdot x_L \cdot l = |V|^2 \cdot y \cdot l$$

$$|I|^2 \cdot X_L = |V|^2 \cdot Y$$

$$\boxed{Q_L = Q_C}$$



- Valores típicos de SIL

U_{nom} = 33 kV → Z_C = 365 Ω → SIL ~ 3 MW

U_{nom} = 132 kV → Z_C = 375 Ω → SIL ~ 50 MW

U_{nom} = 500 kV → Z_C = 250 Ω → SIL ~ 1000 MW

MODELOS DE LÍNEAS CORTAS, MEDIAS y LARGAS

Si interesara obtener un circuito R-L-C que permita representar a la Línea (¿Porqué interesaría?), observando el desarrollo en series de las funciones hiperbólicas

$$\begin{cases} Ch(\gamma x) = 1 + \dfrac{(\gamma x)^2}{2!} + \dfrac{(\gamma x)^4}{4!} + \dfrac{(\gamma x)^6}{6!} + \cdots \\ Sh(\gamma x) = \gamma x + \dfrac{(\gamma x)^3}{3!} + \dfrac{(\gamma x)^5}{5!} + \dfrac{(\gamma x)^7}{7!} + \cdots \end{cases}$$

Puede notarse que, para "l < 300 km",

$$\begin{cases} Ch(\gamma l) \approx 1 + \dfrac{(\gamma l)^2}{2!} \\ Sh(\gamma l) \approx \gamma l \end{cases}$$

Con lo que la primera de las "Ecuaciones Hiperbólicas de la Línea" resulta

$$V_S = V_R \cdot \left[1 + \frac{(\gamma l)^2}{2}\right] + I_R \cdot Z_c \cdot (\gamma l)$$

Advirtiendo que

$$(\gamma l) = \left(\sqrt{zy} \cdot l\right) = \sqrt{Z \cdot Y}$$

$$(\gamma l)^2 = \left(\sqrt{zy} \cdot l\right)^2 = Z \cdot Y$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{zl}{yl}} = \sqrt{\frac{Z}{Y}}$$

Se desarrolla

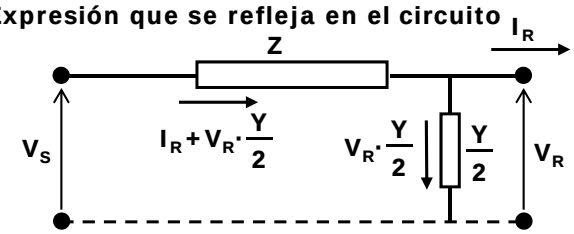
$$V_S = V_R \cdot \left[1 + \frac{Z \cdot Y}{2}\right] + I_R \cdot \sqrt{\frac{Z}{Y}} \cdot \sqrt{Z \cdot Y}$$

$$V_S = V_R + Z \cdot V_R \cdot \frac{Y}{2} + I_R \cdot Z$$

Obteniéndose

$$\boxed{V_S = V_R + Z \cdot \left(V_R \cdot \frac{Y}{2} + I_R\right)}$$

Expresión que se refleja en el circuito



MODELOS DE LÍNEAS CORTAS, MEDIAS y LARGAS

Por otra parte, si en

$$I_S = V_R \cdot \frac{Sh(\gamma l)}{Z_c} + I_R \cdot Ch(\gamma l)$$

Se realiza el mismo reemplazo que en V_S

$$I_S = V_R \cdot \frac{\gamma l}{Z_c} + I_R \cdot \left[1 + \frac{(\gamma l)^2}{2}\right]$$

$$I_S = V_R \cdot \frac{\sqrt{Z \cdot Y}}{\sqrt{\dfrac{Z}{Y}}} + I_R \cdot \left[1 + \frac{Z \cdot Y}{2}\right]$$

$$I_S = V_R \cdot Y + I_R + I_R \cdot \frac{Z \cdot Y}{2}$$

Y, si del circuito anterior se deduce

$$I_R = \frac{V_S - V_R}{Z} - V_R \cdot \frac{Y}{2}$$

Reemplazando esta expresión de I_R en la anterior, se tiene

$$I_S = I_R + V_R \cdot Y + \left(\frac{V_S - V_R}{Z} - V_R \cdot \frac{Y}{2}\right) \cdot \frac{Z \cdot Y}{2}$$

$$I_S = I_R + V_R \cdot Y + V_S \cdot \frac{Y}{2} - V_R \cdot \frac{Y}{2} - V_R \cdot \frac{Z \cdot Y^4}{4}$$

Observando que siendo ya de por sí "Y" un parámetro numéricamente pequeño, resulta

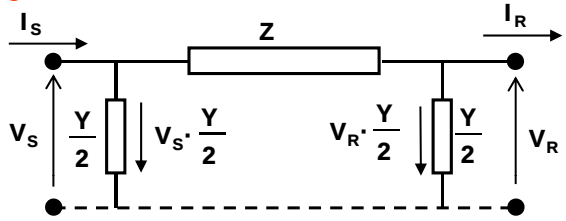
$$\frac{Z \cdot Y^4}{4} \approx 0$$

Se puede considerar

$$I_S = I_R + V_R \cdot Y + V_S \cdot \frac{Y}{2} - V_R \cdot \frac{Y}{2}$$

$$\boxed{I_S = I_R + V_R \cdot \frac{Y}{2} + V_S \cdot \frac{Y}{2}}$$

Expresión esta última que permite completar el circuito de Líneas de "l < 300 km", denominado "Modelo en π de Líneas de Media Longitud", así



MODELOS DE LÍNEAS CORTAS, MEDIAS y LARGAS

Si "l < 100 km", pueden despreciarse aún más términos de las expresiones en series de las funciones Ch(γl) y Sh(γl), así

$$\begin{cases} Ch(\gamma l) \approx 1 \\ Sh(\gamma l) \approx \gamma l \end{cases}$$

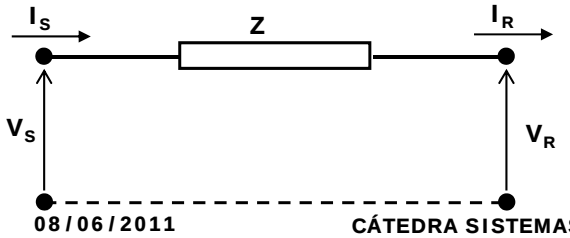
Con estas simplificaciones resulta una expresión de V_S ...

$$V_S = V_R \cdot 1 + I_R \cdot Z_c \cdot (\gamma l)$$

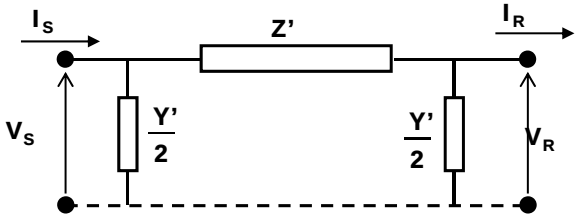
$$V_S = V_R \cdot 1 + I_R \cdot \sqrt{\frac{Z}{Y}} \cdot \sqrt{Z \cdot Y}$$

$$V_S = V_R \cdot 1 + I_R \cdot Z$$

Expresión que se refleja en el circuito siguiente, el cual se conoce como el "Modelo de la Línea de Corta Longitud" y es válido para "l < 100 km".



Si "l > 300 km" e interesara contar con un circuito equivalente (¿Porqué interesaría?), se plantea utilizar uno en "π" como el siguiente.



Las ecuaciones que se construyen a partir de éste, como por caso para las tensiones

$$V_S = V_R \cdot \left[1 + \frac{Z' \cdot Y'}{2}\right] + I_R \cdot Z'$$

Deben ser equivalentes a

$$V_S = V_R \cdot Ch(\gamma l) + I_R \cdot Z_c \cdot Sh(\gamma l)$$

De donde se deduce

$$\left[1 + \frac{Z' \cdot Y'}{2}\right] = Ch(\gamma l) \qquad Z' = Z_c \cdot Sh(\gamma l)$$

MODELOS DE LÍNEAS CORTAS, MEDIAS y LARGAS

Desarrollando ...

$$Z' = Z_c \cdot Sh(\gamma l)$$

$$Z' = Z_c \cdot Sh(\gamma l) \cdot \frac{\gamma l}{\gamma l}$$

$$Z' = \sqrt{\frac{Z}{Y}} \cdot \frac{Sh(\gamma l)}{\gamma l} \cdot \sqrt{Z \cdot Y}$$

$$\boxed{Z' = Z \cdot \frac{Sh(\gamma l)}{\gamma l}}$$

Por otra parte

$$\left[1 + \frac{Z' \cdot Y'}{2}\right] = Ch(\gamma l)$$

$$\frac{Y'}{2} = \frac{Ch(\gamma l) - 1}{Z'}$$

$$\frac{Y'}{2} = \frac{Ch(\gamma l) - 1}{Z_c \cdot Sh(\gamma l)}$$

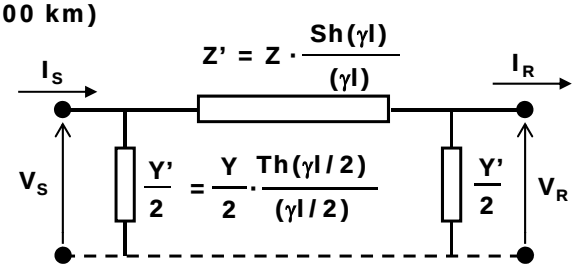
$$\frac{Y'}{2} = \frac{\frac{Ch(\gamma l) - 1}{Sh(\gamma l)}}{Z_c} = \frac{Th(\gamma l / 2)}{Z_c}$$

$$\frac{Y'}{2} = \frac{Th(\gamma l / 2)}{Z_c} \cdot \frac{\gamma l / 2}{\gamma l / 2}$$

$$\frac{Y'}{2} = \frac{Th(\gamma l / 2)}{\gamma l / 2} \cdot \frac{\gamma l / 2}{Z_c} = \frac{Th(\gamma l / 2)}{\gamma l / 2} \cdot \frac{\sqrt{Z \cdot Y} / 2}{\sqrt{\frac{Z}{Y}}}$$

$$\boxed{\frac{Y'}{2} = \frac{Th(\gamma l / 2)}{\gamma l / 2} \cdot \frac{Y}{2}}$$

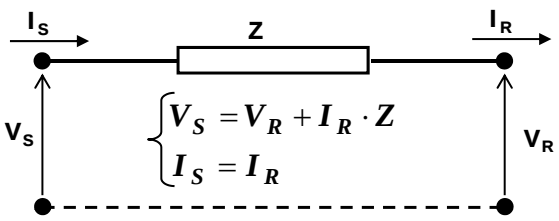
Expresiones que permiten obtener, a partir de los parámetros usuales de una Línea, un "Modelo en π de la Línea de Larga Longitud" (l > 300 km)



MODELOS DE LÍNEAS CORTAS, MEDIAS y LARGAS

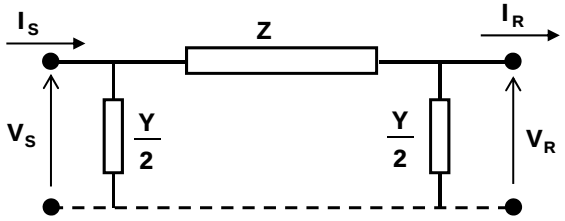
- **RESUMEN**

Modelo de Línea Corta (l < 100 km)



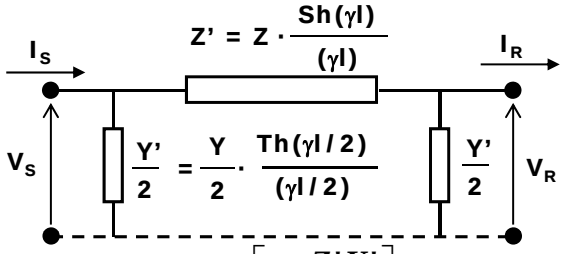
$$\begin{cases} V_S = V_R + I_R \cdot Z \\ I_S = I_R \end{cases}$$

Modelo de Línea Media (100 < l < 300 km)

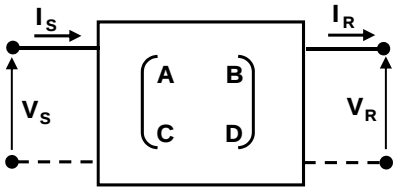


$$\begin{cases} V_S = V_R \cdot \left[1 + \frac{Z \cdot Y}{2}\right] + Z \cdot I_R \\ I_S = I_R + (V_R + V_S) \cdot \frac{Y}{2} \end{cases}$$

Modelo de Línea Larga (l > 300 km)



$$\begin{cases} V_S = V_R \cdot \left[1 + \frac{Z' \cdot Y'}{2}\right] + Z' \cdot I_R \\ I_S = I_R + (V_R + V_S) \cdot \frac{Y'}{2} \end{cases}$$

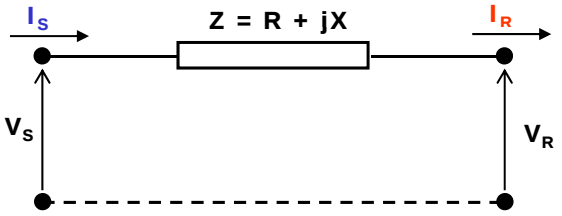


$$A = Ch(\gamma l)$$
$$B = Z_c \cdot Sh(\gamma l)$$
$$C = \frac{Sh(\gamma l)}{Z_c}$$
$$D = A$$

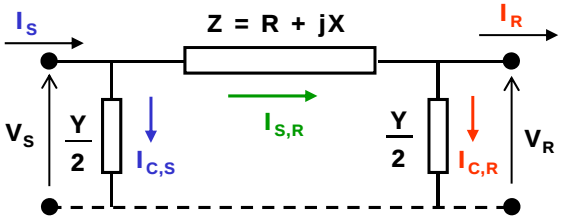
$$\begin{cases} V_S = A \cdot V_R + B \cdot I_R \\ I_S = C \cdot V_R + D \cdot I_R \end{cases}$$

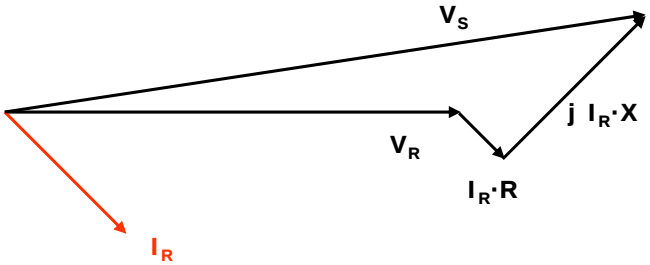
DIAGRAMA FASORIAL PARA LÍNEAS CORTAS y MEDIAS

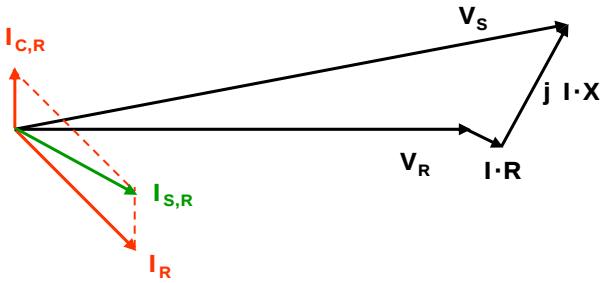
Modelo de Línea Corta (l < 100 km)

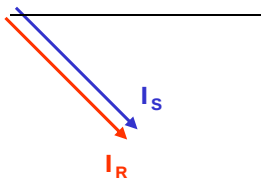


Modelo de Línea Media (100 < l < 300 km)









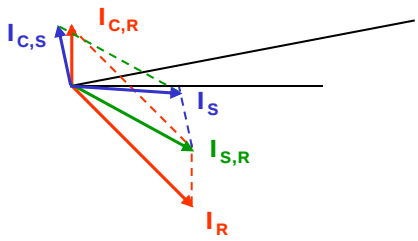
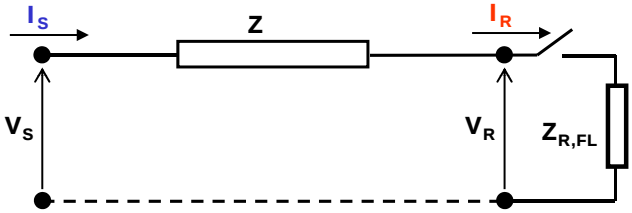
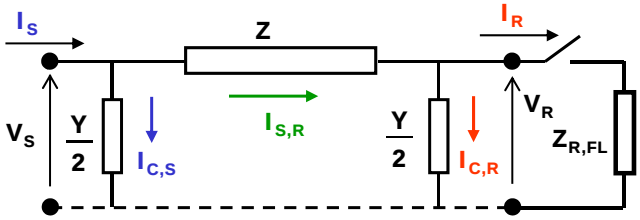


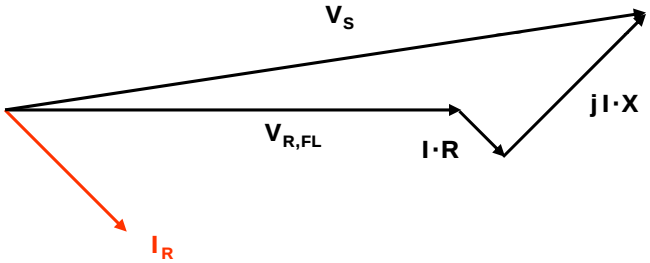
DIAGRAMA FASORIAL PARA LÍNEAS CORTAS y MEDIAS

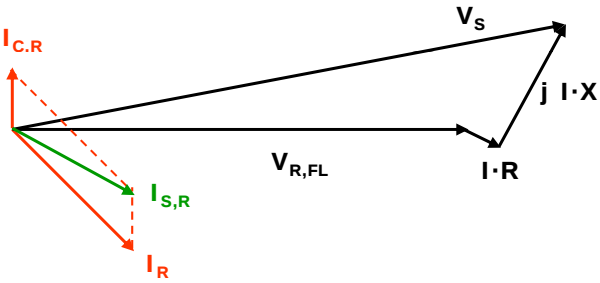
Modelo de Línea Corta (l < 100 km)



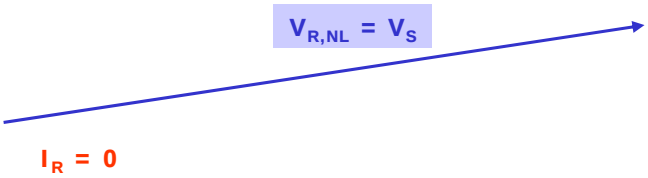
Modelo de Línea Media (100 < l < 300 km)



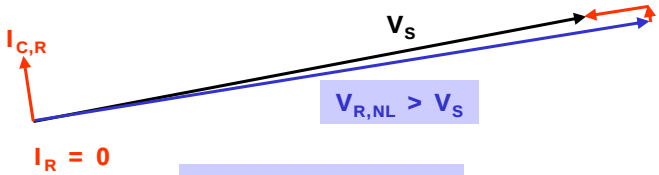




Se fija V_S y se quita la carga ...



Se fija V_S y se quita la carga ...

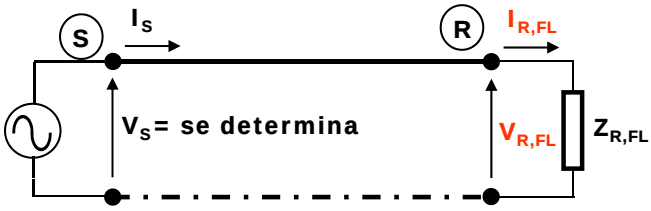


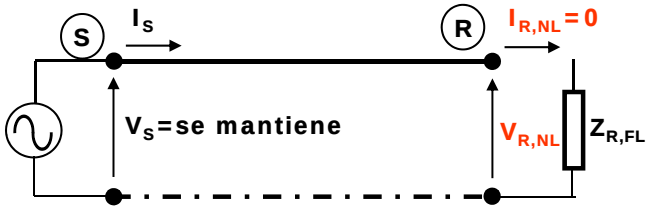
¡ Efecto Ferranti !

REGULACIÓN DE TENSIÓN

- **Se define**

$$\textit{Regulación de Tensión}(\%) = \frac{|V_{R,NL}| - |V_{R,FL}|}{|V_{R,FL}|} \cdot 100$$





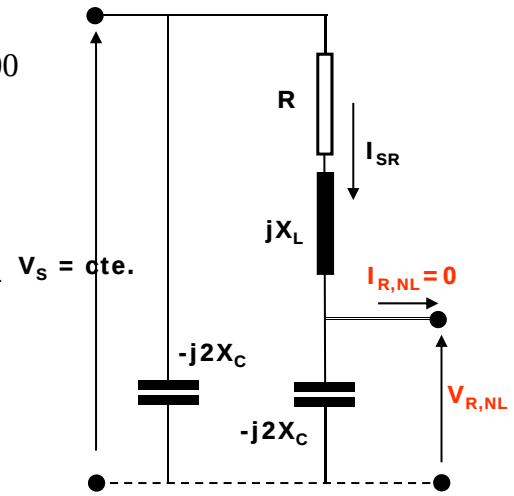
- **En el Modelo de Línea Corta**

$$|V_{R,NL}| = |V_S|$$

- **En el Modelo de Línea Larga**

$$V_S = V_{R,NL} \cdot Ch(\gamma l) \qquad \underbrace{V_{R,NL}}_{> V_S} = \frac{V_S}{\underbrace{Ch(\gamma l)}_{< 1}}$$

- **En el Modelo de Línea Media**



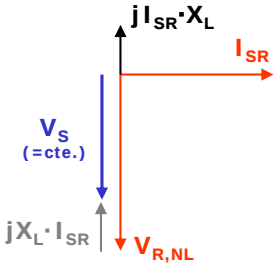


Diagrama Fasorial aproximado ($R \sim 0$ y $X_C >> X_L$).

En Líneas de Media y Larga longitud $|V_{R,NL}|$ es superior a $|V_S|$ → → Efecto Ferranti

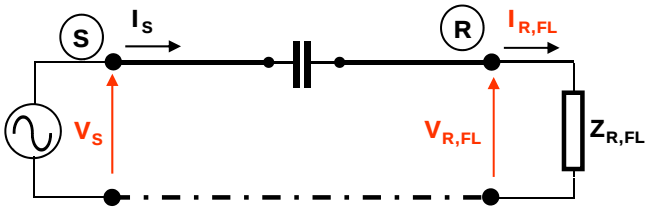
REGULACIÓN DE TENSIÓN – LÍNEAS COMPENSADAS

- **Compensación**
  - **Serie**
  - **Shunt, paralelo o transversal.**

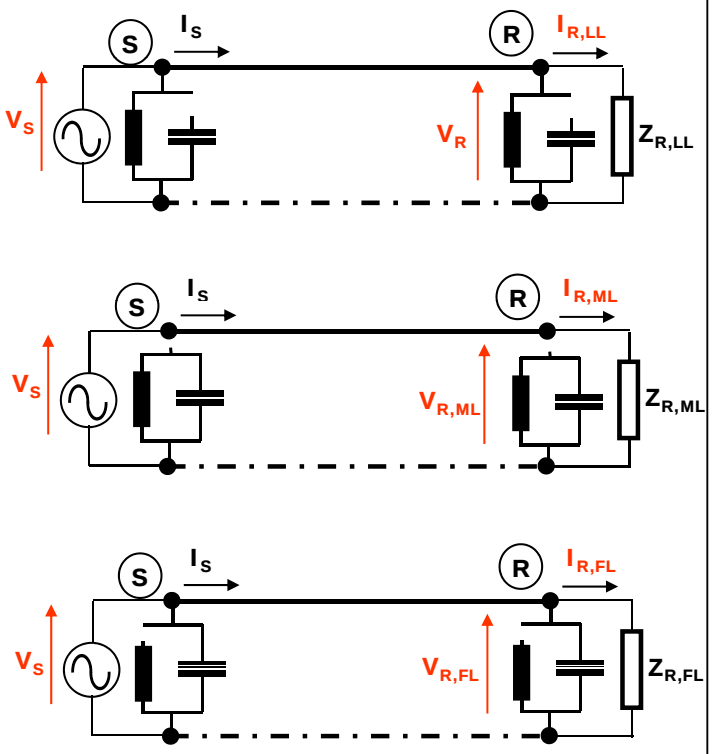
  - **Inductiva**
  - **Capacitiva**

- **Objeto de la Compensación ...**

Regular Tensión, pues V_S y V_R = 0,97 ... 1,03 pu. Y con ello ...
Maximizar Capacidad de Transmisión de Potencia.



Ventajas / Desventajas ....

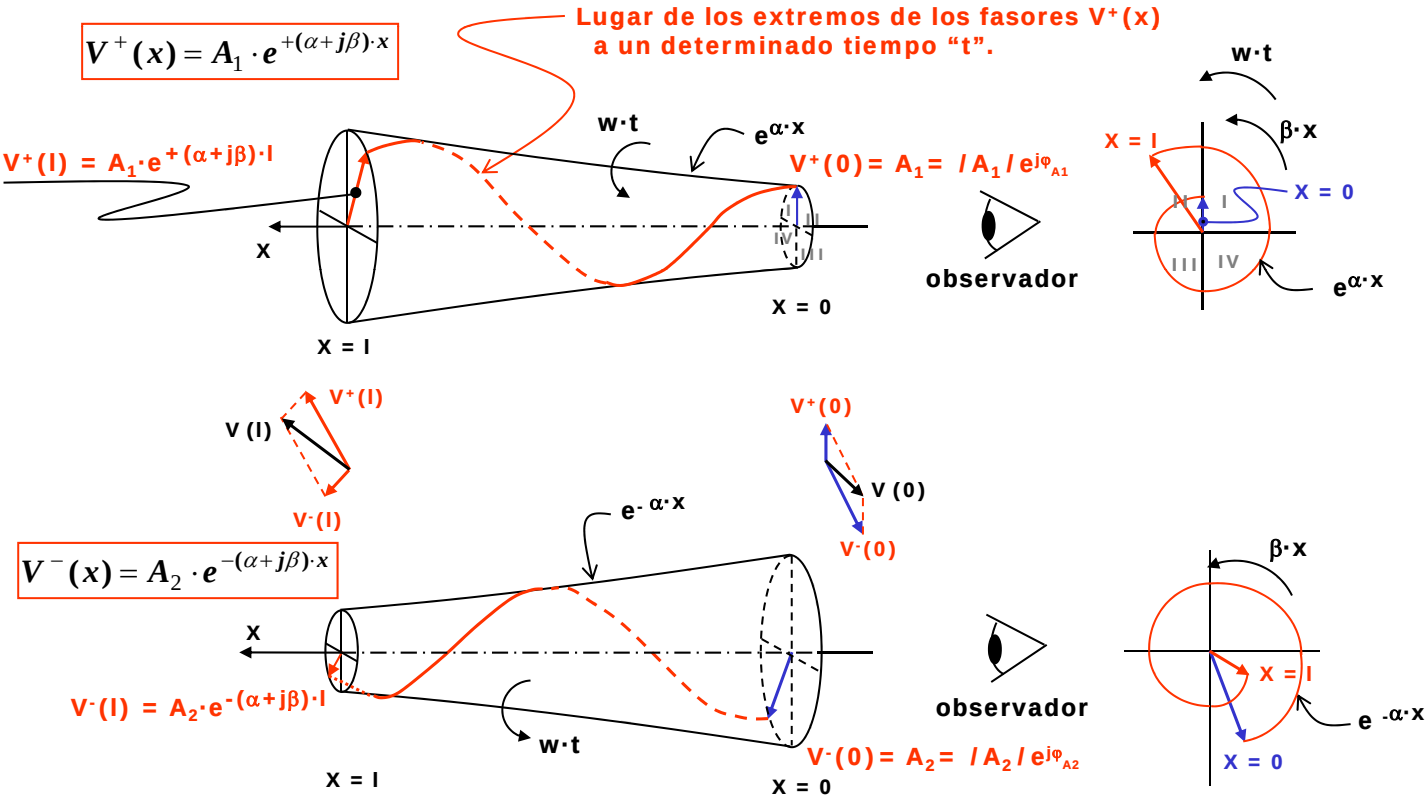


MISCELÁNEAS: INTERPRETACIÓN FÍSICA DE LAS ECUACIONES DE LA LÍNEA

MISCELÁNEAS: INTERPRETACIÓN FÍSICA DE LAS ECUACIONES DE LA LÍNEA

- **EN EL DOMINIO DEL ESPACIO.**

$$V^{+}(x) = A_1 \cdot e^{+(\alpha + j\beta)\cdot x}$$



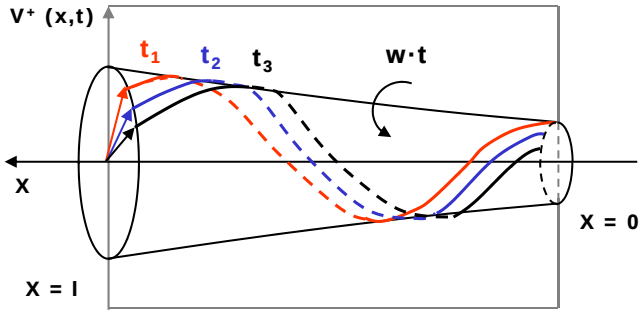
$$V^{-}(x) = A_2 \cdot e^{-(\alpha + j\beta)\cdot x}$$

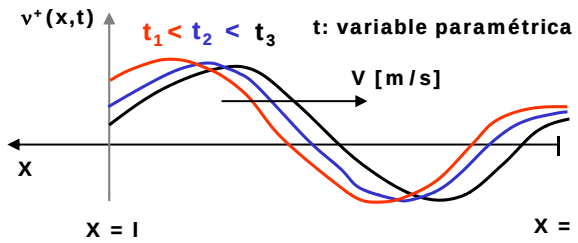
MISCELÁNEAS: INTERPRETACIÓN FÍSICA DE LAS ECUACIONES DE LA LÍNEA

- **EN EL DOMINIO DEL TIEMPO.**

$$v^{+}(x,t) = \mathrm{Im}\left[\left|A_1\right| \cdot e^{+j(\omega\cdot t + \varphi_{A1})} \cdot e^{+(\alpha + j\beta)\cdot x}\right]$$

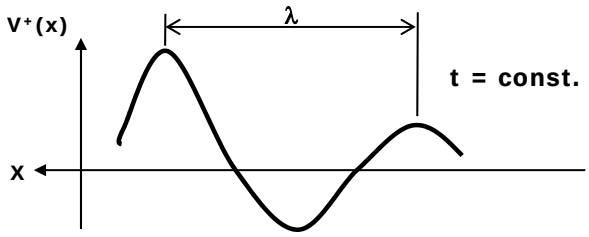
$$v^{+}(x,t) = \mathrm{Im}\left[\left|A_1\right| \cdot e^{+\alpha\cdot x} \cdot sen(\omega \cdot t + \varphi_{A1} + \beta \cdot x)\right]$$





Si se denomina con "T" al tiempo que le lleva al "cono" dar una vuelta completa, se cumple la relación $\omega \cdot T = 2 \cdot \pi$ [*radianes*]

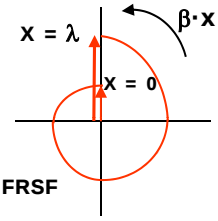
Y el pico de la onda "avanzó" una distancia "λ".



Esto es, el pico de la onda se desplazó a una velocidad dada por la relación:

$$v = \frac{\lambda}{T}\ [m/s]$$

Por otra parte, a un t=constante, avanzando por el eje de las "x" encontramos dos fasores alineados al recorrer esa distancia "λ", tal que se verifica la siguiente relación: $\beta \cdot \lambda = 2 \cdot \pi$



MISCELÁNEAS: INTERPRETACIÓN FÍSICA DE LAS ECUACIONES DE LA LÍNEA

Vale decir ...

$$\beta \cdot \lambda = 2 \cdot \pi \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{2 \cdot \pi}{\beta}$$

$$v = \frac{\lambda}{T} \, [km/s] \rightarrow v = \frac{2 \cdot \pi / \beta}{1/f}$$

... que la onda de tensión directa se desplaza a una velocidad dada por la relación

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot f}{\beta} \quad [km/s]$$

Valores usuales de parámetros de Líneas de 132 kV son:

- **r = 0,1 Ω/km (conductor 300/50 mm² Al/Ac)**
- **w·l = 0,4 Ω/km**
- **w·C = 2,85 μS/km**

Con lo que

$$\gamma = \sqrt{z \cdot y} = \sqrt{(r + j\omega \cdot L) \cdot (j\omega \cdot C)} = \alpha + j\beta$$

$$\gamma = \sqrt{(0{,}1 + j0{,}4) \cdot (j2{,}85 \cdot 10^{-6})}$$

$$\gamma = 1{,}325 \cdot 10^{-4} + j0{,}0011$$

$$\beta = 0{,}0011 \quad [radianes/km]$$

$$\boxed{v = \frac{2 \cdot \pi \cdot 50}{0{,}0011} = 285.600 \quad [km/s]}$$

$$v = 0{,}95 \cdot c$$

$$\boxed{\lambda = \frac{2 \cdot \pi}{\beta} = \frac{2 \cdot \pi}{0{,}0011} = 5.712 \quad [km]}$$

Y si "r" fuese nula ... ?

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA RECOMENDADA

- **William D. Stevenson y John J. Grainger "Análisis de Sistemas Eléctricos de Potencia", Editorial McGraw-Hill. México, 1.995.**
- **Enrique Ras "Teoría de Líneas Eléctricas", Tomos I y II. Editorial Marcombo. Barcelona, 1.973.**
- **J. Duncan Glover y Mulukutla S. Sarma "Sistemas de Potencia – Análisis y Diseño", International Thomson Editores. México, 2.004.**
- **P. Marcelic "Líneas y Redes Eléctricas", Editorial Ediar. Buenos Aires, 1.957.**

FIN UT2